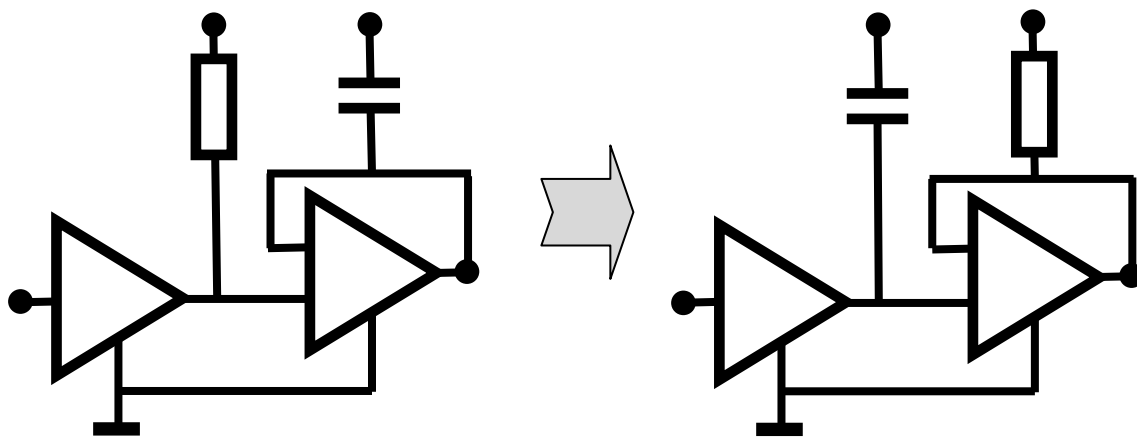


СИНТЕЗ, АНАЛИЗ И ДИАГНОСТИКА ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

САД-2018



Ульяновск 2018

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
OF THE RUSSIAN FEDERATION

ULYANOVSK STATE TECHNICAL UNIVERSITY

**SYNTHESIS, ANALYSIS
AND DIAGNOSIS
OF ELECTRONIC NETWORKS**

SAD-2018

Ulyanovsk 2018

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

СИНТЕЗ, АНАЛИЗ И ДИАГНОСТИКА ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

Международный сборник научных трудов

Выпуск 15

Вторая Международная заочная конференция
«Синтез, анализ и диагностика электронных цепей»
(Россия, г. Ульяновск, 10–13 сентября 2018 года)

Ульяновск
УлГТУ
2018

УДК 516.7.24/25+519.873
ББК 32.85
С38

УДК 516.7.24/25+519.873

Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международный сборник научных трудов / под ред. В. В. Филаретова. – Ульяновск : УлГТУ, 2018. – 240 с.

Сборник (вып. 15) продолжает серию специализированных сборников, изданных в Ульяновском государственном техническом университете (УлГТУ) в рамках международных конференций: «Континуальные логико-алгебраические исчисления и нейроматематика», «Конференция по логике, информатике, науковедению», «Волгинские чтения», «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей».

Данный выпуск составлен из докладов Второй международной заочной конференции «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей», проходившей в УлГТУ 10–13 сентября 2018 года и посвященной 190-летию издания монографии Георга Ома.

В докладах рассматриваются теоретические вопросы и практические приложения современной теории электрических и электронных цепей, в том числе: структурный синтез и преобразования, схемно-алгебраический анализ и диакоптика, формирование символьных полиномиальных коэффициентов и функций чувствительности. Обсуждается проектирование электронных цепей и электроэнергетических систем с позиций схемной алгебры, матричного анализа и теории графов.

Рекомендуется для специалистов в области схемотехники аналоговых и аналого-дискретных электронных цепей, магистрантов и аспирантов соответствующих направлений и специальностей.

Статьи представлены в авторской редакции.

Редакционная коллегия:

Горшков К.С., канд. техн. наук (ответственный секретарь);
Grishkevich A., д-р техн. наук, Czestochowa university of technology (Polska);
Курганов С. А., д-р техн. наук (зам. ответственного редактора);
Мауко G., канд. техн. наук, Broadcom Corporation (USA);
Соловьева Е. Б., д-р техн. наук, СПбГЭУ – ЛЭТИ им. В.И.Ленина;
Филаретов В. В., д-р техн. наук (ответственный редактор).

ISBN 978-5-9795-1862-6

© Коллектив авторов, 2018
© Оформление. УлГТУ, 2018

**Вторая международная заочная научно-техническая конференция
«Синтез, анализ и диагностика электронных цепей» (САД-2018)
(Россия, Ульяновск: УлГТУ, 10–13 сентября 2018 года)**

Организационный комитет:

Председатель оргкомитета – д.т.н. **Филаретов В.В.**

Зам председателя –

профессор кафедры «Электроснабжение», д.т.н. **Курганов С.А.**

Ответственный секретарь –

ст. преподаватель кафедры «Электроснабжение» **Ребровская Д.А.**

Члены оргкомитета:

Дубов А.Л. – декан энергетического факультета;

Кузнецов А.В. – зав кафедрой «Электроснабжение»;

Почкайло Н.А. – начальник отдела НТИ УНИ.

Настоящая конференция отмечена **190-летием издания монографии Георга Ома**, заложившей фундамент теории электрических цепей, и проходит уже в традиционном заочном формате.

Первая конференция (САД–2015) была посвящена **памяти Леонида Ивановича Волгина – основателя сборника «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей»**. Предыдущие конференции с другими названиями также служили для апробации и публикации материалов в большинстве выпусков нашего сборника. С самого начала издания (в 2003г.) мы отказались от «бумагооборота» между авторами и редколлегией, принимая электронные версии статей и докладов.

Процесс подготовки выпусков теперь отличает активное взаимодействие с авторами по электронной почте. Оно служит доработке и развитию статей, заказу материалов, повышению научного уровня разделов сборника. Такое взаимодействие не знает границ и не сопряжено со значительными материальными затратами для авторов.

Очные встречи на конференциях, конечно, более привычны, но отнимают существенно больше времени, сил, и денежных затрат, чем многие участники не располагают. Заочная конференция предполагает интенсификацию взаимного обсуждения докладов участниками конференции и читателями по электронной почте в течение отведенного времени и за его пределами. Это определяет актуальные темы для будущих выпусков, ориентирует авторов статей и читателей на незамедлительную подготовку новых материалов.

АНАЛИЗ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

НЕЯВНОЕ ЗАМЫКАНИЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ В ЦЕПЯХ С АНОМАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Г. В. Майко, О. Ш. Мамед, В. В. Филаретов

Показано, что эквивалентное преобразование деревьев из однотипных аномальных элементов может привести к параллельному соединению норатора и нуллатора, то есть неявному (по отношению к исходной схеме) замыканию узлов. Предложено эквивалентное преобразование, основанное на различных объединениях и разъединениях неявно параллельных элементов.

It is shown that the equivalent transformation of trees from the same type of pathological elements can lead to a parallel connection of the norator and the nullator, that is, an implicit (with respect to the original scheme) closure of nodes. An equivalent transformation based on various unions and separations of implicitly parallel elements is proposed.

Об эквивалентных преобразованиях. Эквивалентное преобразование электронных схем – это такое изменение структуры схемы или взаимного соединения её элементов, при котором характеристики и параметры всей схемы не изменяются [1–4]. Такие преобразования обычно не связаны с изменением параметров элементов.

Преобразования являются эквивалентными, если системы уравнений, описывающие электронные схемы до и после преобразования, не

изменяются. Если матрицы проводимости электронных схем, представляющие системы уравнений [5], идентичны или имеют одинаковые определители миноров, то параметры и характеристики схемы, определяемые такими минорами, будут идентичными. В частности, передаточные функции электронных схем, определяемые как отношения миноров матрицы проводимости [5–7], не изменяются при эквивалентных преобразованиях.

Система уравнений, описывающая электронную схему, всегда основывается на выбранной или заданной математической модели элементов схемы. Поэтому эквивалентность преобразования электронных схем зависит от используемых моделей. При изменениях в этих моделях преобразования, ранее эквивалентные, могут приводить к схемам, имеющим другую систему уравнений, то есть не являющимся полностью эквивалентными.

Например, известны эквивалентные преобразования схем с идеальными моделями активных элементов (ОУ, транзисторов, конверторов тока и т.д.) [3, 4, 8]. Однако при использовании реальных компонентов или более точных моделей этих элементов характеристики схем, считающихся ранее эквивалентными, будут отличаться. Это позволяет выбрать наиболее оптимальную схему, которую уже будет целесообразно практически реализовать.

Модели для программы SPICE, поставляемые производителями интегральных схем и электронных компонентов, позволяют приблизиться по точности к натурному эксперименту и убедиться в справедливости того или иного преобразования.

Эквивалентные преобразования могут эффективно применяться для обхода патентных ограничений. При таких преобразованиях изменяется структура цепи, то есть взаимное соединение элементов. Поэтому, если некоторая схема защищена патентом или авторским свидетельством, то, применяя к ней эквивалентные преобразования, можно получить схемы с другим соединением элементов.

С одной стороны, такие схемы будут функционально эквивалентны оригинальной, а с другой стороны, имея другую структуру, уже не будут защищены патентом или авторским свидетельством. Следовательно, такие

схемы можно свободно использовать вместо оригинальной схемы. В связи с этим имеет смысл патентовать не одну аналоговую схему, а всё семейство эквивалентных схем.

Аномальные элементы в моделях активных компонентов.

Известно, что различные идеальные активные элементы – транзисторы, операционные усилители, конверторы тока, токовые зеркала – можно представить в виде соединения аномальных элементов [12, 13]. Аномальные (патологические) элементы схем [9–14] привели к расширению возможностей эквивалентных схемных преобразований, что упрощает как анализ, так и синтез электронных устройств.

Используются аномальные элементы двух типов – нуллаторы и зеркальные элементы напряжения, задающие напряжения на своих выводах, и нораторы и зеркальные элементы тока, задающие токи [9, 11]. Модели активных элементов представляют собой объединение чётного числа (обычно двух) аномальных элементов разного типа. Это необходимо для того, чтобы система уравнений, описывающая схему с такими элементами, была совместна, а матрица проводимостей, соответственно, была квадратной [10, 14].

Эффективным способом получения новых эквивалентных схем являются эквивалентные преобразования деревьев из аномальных элементов в моделях электронных схем [15–18]. Такие схемы с различными деревьями будут иметь идентичные матрицы проводимости, лишь строка (или столбец), соответствующая узлам подключения дерева, будет иметь сумму индексов строк (или столбцов), записанных в другом порядке. Понятно, что сумма, записанная в элементах этого столбца матрицы проводимости, не зависит от порядка суммирования.

От преобразования деревьев к неявному замыканию узлов.

В данной статье предлагается новое эквивалентное преобразование, которое может быть доказано через преобразование активных деревьев, и становится очевидным после применения соответствующего преобразования деревьев. Идея предлагаемого преобразования более простая и основывается на свойстве соединения аномальных элементов придавать узлам одинаковые потенциалы, то есть замыкать некоторые

узлы схемы накоротко без использования идеального проводника («закоротки»).

Например, параллельное соединение норатора и нуллатора эквивалентно идеальному проводнику, поэтому оно соединяет два узла одинакового потенциала (замыкает эти два узла). Такое замыкание в активной схеме можно назвать явным. Через параллельное соединение норатора и нуллатора, подобно идеальному проводнику, можно переносить точки подсоединения элементов, что может привести к образованию новых объединений параллельных элементов.

Неявным замыканием назовем соединение, когда норатор или нуллатор замыкается совокупностью нуллаторов или нораторов, образующих путь. Неявное замыкание двух узлов становится явным в результате применения преобразования нуллаторного или нораторного дерева [16–18] соответственно.

Через неявно замкнутые узлы также переносятся точки подсоединения элементов, что может привести к образованию новых объединений параллельных элементов. Параллельному соединению на схеме соответствует повторяющаяся сумма проводимостей в матрице проводимости.

Обычно можно легко найти один такой элемент – это собственная проводимость узла или диагональный элемент пассивной подсхемы. Получить ещё одну сумму элементов можно, если сложить элементы столбцов (строк) матрицы проводимости, подключив к соответствующим узлам нуллаторы (нораторы).

Отображение неявного замыкания в матрице проводимости. Рассмотрим матрицу проводимости некоторой схемы с полной топологической структурой [6] (рис.1), в которой собственная проводимость узла а равна

$$Y_{aa} = Y_{0a} + \sum_{i=1, i \neq a}^n Y_{ia} = Y_{0a} + (Y_{ab} + Y_{ac}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq a, b, c}}^n Y_{ia} .$$

	a	b	c	d	e
a	$+Y_{aa}$	$-Y_{ab}$	$-Y_{ac}$	$-Y_{ad}$	
b	$-Y_{ab}$	$+Y_{bb}$	$-Y_{bc}$	$-Y_{bd}$	
c	$-Y_{ac}$	$-Y_{bc}$	$+Y_{cc}$	$-Y_{cd}$	
d	$-Y_{ad}$	$-Y_{bd}$	$-Y_{cd}$	$+Y_{dd}$	
e					

Рис. 1

Сумму ($Y_{ab}+Y_{ac}$) можно получить, если сложить столбцы b и c (рис.2):

	a	b+c	d	e
a	$+Y_{aa}$	$-(Y_{ab}+Y_{ac})$	$-Y_{ad}$	
b	$-Y_{ab}$	$+Y_{bb}-Y_{bc}$	$-Y_{bd}$	
c	$-Y_{ac}$	$-Y_{bc}+Y_{cc}$	$-Y_{cd}$	
d	$-Y_{ad}$	$-Y_{bd}-Y_{cd}$	$+Y_{dd}$	
e				

Рис. 2

Но проводимости Y_{ab} и Y_{ac} входят также в строки b и c. Можно исключить их из матрицы проводимости, например, подключив между узлами b и c норатор. Это будет просто параллельное соединение нуллатора и норатора, то есть замыкание двух узлов b и c, и новая схема оказывается эквивалентной обыкновенной пассивной схеме.

Другой вариант исключения проводимостей Y_{ab} и Y_{ac} – это подключить к узлам b и c два заземлённых норатора. При этом строки b и c будут исключены из матрицы проводимости (рис.3):

	a	b+c	d	e
a	$+Y_{aa}$	$-(Y_{ab}+Y_{ac})$	$-Y_{ad}$	
d	$-Y_{ad}$	$-Y_{bd}-Y_{cd}$	$+Y_{dd}$	
e				

Рис. 3

Но тогда матрица проводимости оказывается несимметричной из-за того, что в схеме используется неравное число аномальных элементов разного типа, поэтому схема будет физически нереализуемой [14]. Чтобы этого не произошло, необходимо подключить к узлам схемы ещё один нуллятор или зеркальный элемент напряжения. Это позволит сделать матрицу проводимости квадратной и, соответственно, гарантирует физическую реализуемость соответствующей схемы.

Один из вариантов структурной схемы соединения аномальных элементов, соответствующий матрице проводимости на рис. 3, показан ниже (рис.4). Как видно, к узлам e и f подключен дополнительный нуллятор. Проводимости элементов Y_{ab} и Y_{ac} входят в матрицу проводимости только как сумма (рис.4), поэтому свойства схемы зависят не от величины проводимости этих элементов, а от их суммы.

Если величину проводимости Y_{ab} изменять в пределах от 0 до $(Y_{ab}+Y_{ac})$ и при этом одновременно выбирать проводимость Y_{ac} в пределах от $(Y_{ab}+Y_{ac})$ до 0 так, чтобы их сумма всегда была равна $(Y_{ab}+Y_{ac})$, то матрица проводимости не изменится, поэтому схемы будут эквивалентными и иметь одинаковые свойства (характеристики).

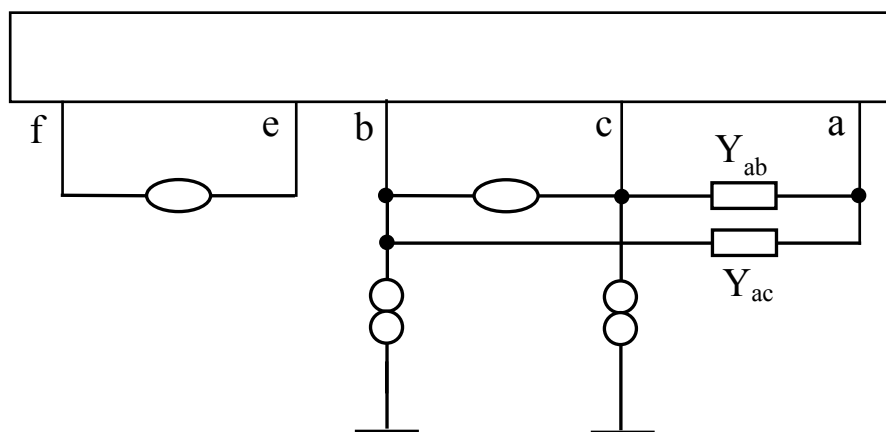


Рис. 4

Известно, что суммарная проводимость двух параллельно включённых элементов равна сумме их проводимостей [5] и в схеме можно заменить два этих элемента на один с проводимостью, равной их

сумме. В рассматриваемом случае мы так же можем считать, что элементы Y_{ab} и Y_{ac} включены в некотором смысле «параллельно», однако эта параллельность не физическая (прямая), а неявная (опосредованная, невидимая).

Интересно отметить, что первоначально нами использовался термин «виртуальная параллельность», то есть параллельность, кажущаяся по измерительным приборам, но не видимая визуально. Неявно параллельно включенные элементы Y_{ab} и Y_{ac} подключаются к трём узлам, а не к двум.

Эквивалентные схемы на основе неявной параллельности имеют интересные особенности. Во-первых, если выбрать проводимость одного элемента равной 0, а проводимость второго – равной $(Y_{ab}+Y_{ac})$, то структура цепи изменится (рис. 5 и 6). В этом случае неявная (виртуальная) проводимость оказывается эквивалентной физической.

Во-вторых, в отличие от других эквивалентных преобразований, число которых ограничено комбинаторным числом переключения узлов подключения элементов, число эквивалентных преобразований с помощью виртуальной параллельности в принципе неограниченно.

Любую сумму можно представить неограниченно большим числом вариантов слагаемых. Это несколько усложняет процесс выбора оптимальной структуры, однако практически эту проблему можно решать как оптимальный одномерный поиск экстремума, а эта задача и варианты её решения достаточно хорошо известны [19].

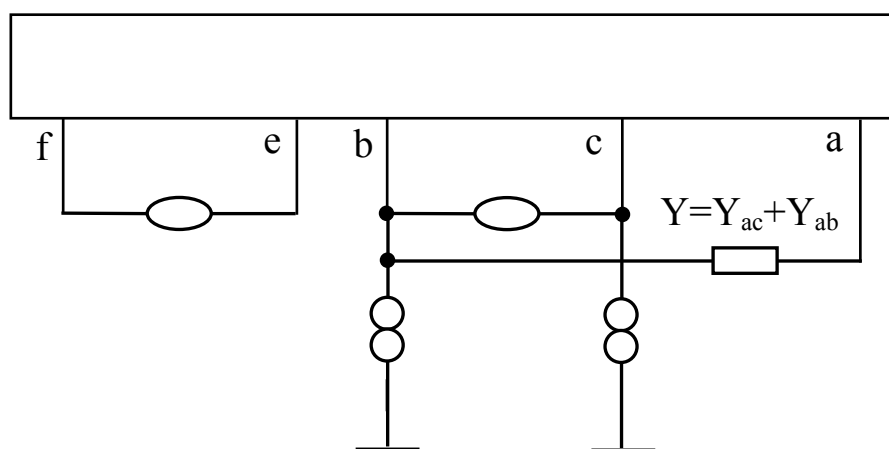


Рис. 5

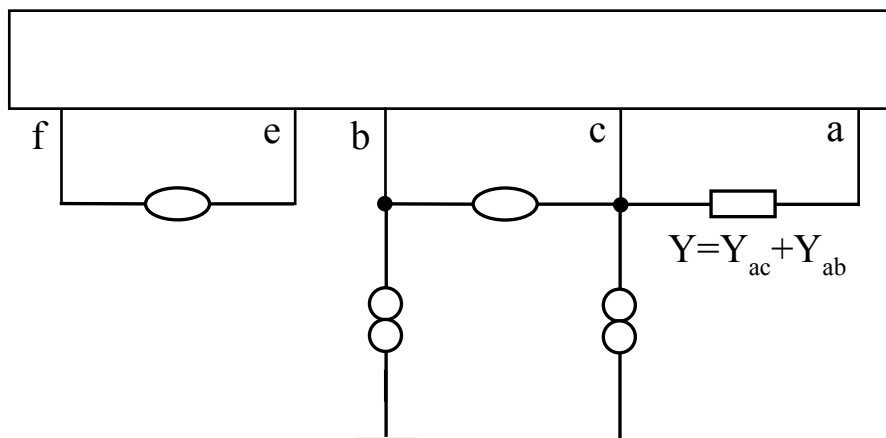


Рис. 6

Очевидно, что виртуальную параллельность также обеспечивает дуальная схема, в которой нуллаторы заменены нораторами и наоборот (рис. 7).

При переходе от нуллаторных схем к практическим схемам, например, с использованием ОУ, схема на рис. 4 соответствует повторителю напряжения на основе ОУ, подключаемого к выходу другого ОУ. А схема на рис. 7 соответствует повторителю тока или токовому зеркалу, подключаемого к входу ОУ.

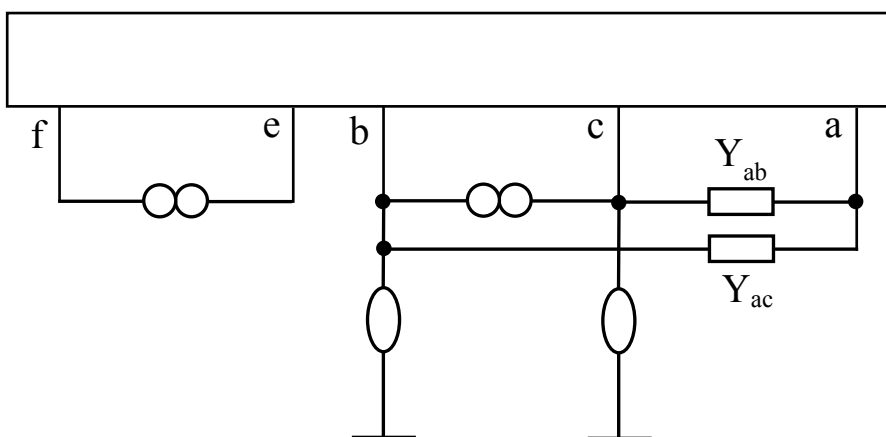


Рис. 7

Такие структуры встречаются в многокаскадных схемах, при согласовании каскадов по напряжению или току, когда между каскадами вводятся повторители напряжения или тока. Кроме того, они могут встречаться при проектировании схем с использованием автоматических систем проектирования, в которых рассматриваются все варианты подключения активных элементов.

В литературе описаны схемы с таким способом подключения ОУ, к которым можно применять описанное преобразование. Например, в [20] на рис. 4.18.д и 4.18.е представлены схемы интеграторов, соответствующие рис.4.

Если интегратор на рис. 4.18.д применить в схеме фильтра на рис. 4.22 в качестве А1, то резисторы R2, R4 и R6 будут включены неявно параллельно. Аналогично, на рис.4.24 звено между каскадами II и III обеспечивает виртуальную параллельность резисторов R3, R8 и R15.

В [21] на рис.4.б представлена схема интегратора, соответствующая виртуальной параллельности на рис.3; на рис.4.с показана схема, соответствующая рис.7, а схема интегратора на рис.4.д имеет соединения активных элементов, соответствующие обоим вариантам неявной параллельности рис. 3 и 7.

Экспериментальная и компьютерная проверка преобразования неявной параллельности. Для практической проверки предложенного эквивалентного преобразования был спроектирован фильтр низких частот с частотой среза равной $F_0 = 1$ кГц, добротностью равной $Q=1$ и коэффициентом передачи, равным $T_0 = 0.1$. Схема фильтра на основе двух повторителей напряжения представлена на рис. 8.

Матрица проводимости пассивной подсхемы показана на рис. 9. Для получения матрицы проводимости активной схемы (рис. 10) используются известные правила [8, 10, 14] учёта идеальных ОУ – суммируются или исключаются столбцы матрицы, соответствующие входам ОУ, и строки, соответствующие выходам ОУ.

Передаточная функция по напряжению от входного узла 3 к выходному узлу 5 определяется как отношение двух миноров:

$$T_{35} = \frac{\Delta_{35}}{\Delta_{33}}$$

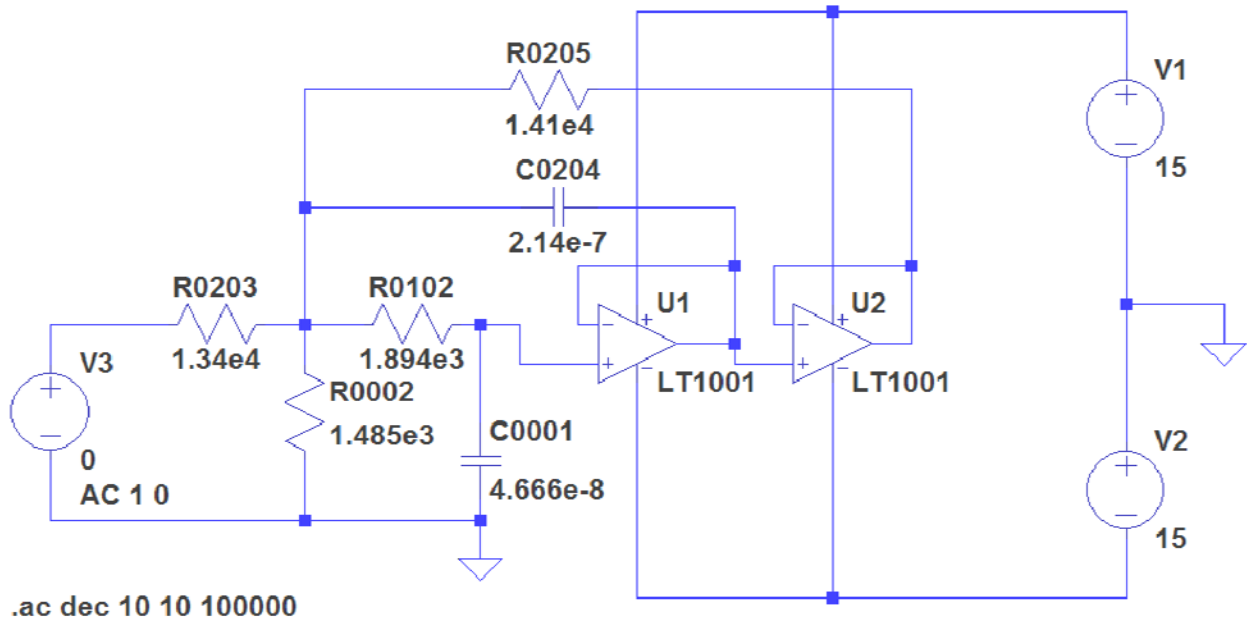


Рис. 8

	1	2	3	4	5
1	$+pC_{01}+Y_{12}$	$-Y_{12}$			
2	$-Y_{12}$	$+pC_{24}+Y_{02}+Y_{23}+Y_{25}+Y_{12}$	$-Y_{23}$	$-pC_{24}$	$-Y_{25}$
3		$-Y_{23}$	$+Y_{23}$		
4		$-pC_{24}$		$+pC_{24}$	
5		$-Y_{25}$			$-Y_{25}$

Рис. 9

	1+4+5	2	3
1	$+pC_{01}+Y_{12}$	$-Y_{12}$	
2	$-pC_{24}-Y_{12}-Y_{25}$	$+pC_{24}+Y_{02}+Y_{23}+Y_{25}+Y_{12}$	$-Y_{23}$
3		$-Y_{23}$	$+Y_{23}$

Рис. 10

Раскрыв определители миноров, получим следующее выражение:

$$T_{35} = \frac{a_0}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p^1 + b_0},$$

где $a_0 = Y_{12} \cdot Y_{23}$; $b_2 = C_{01} \cdot C_{24}$; $b_1 = C_{01} \cdot (Y_{02} + Y_{23} + Y_{25} + Y_{12})$; $b_0 = Y_{12} \cdot (Y_{02} + Y_{23})$.

Коэффициенты передаточной функции определяются из параметров фильтра F_0 , Q и T_0 как $b_0 = (2 \cdot \pi \cdot F_0)^2$; $b_1 = (2 \cdot \pi \cdot F_0) / Q$; $b_2 = 1$; $a_0 = T_0 \cdot b_0$. Подставляя выбранные выше числовые значения параметров фильтра, получаем систему нелинейных компонентных уравнений.

Эта система уравнений была решена в программе Matlab с использованием стандартной функции `lsqnonlin` [22]. При этом, как это рекомендуется в [6], для обеспечения условий физической реализуемости была проведена следующая замена переменных: $x_i = x_i^2$ для всех искомых резисторов и конденсаторов. Начальная точка была получена методом Монте-Карло.

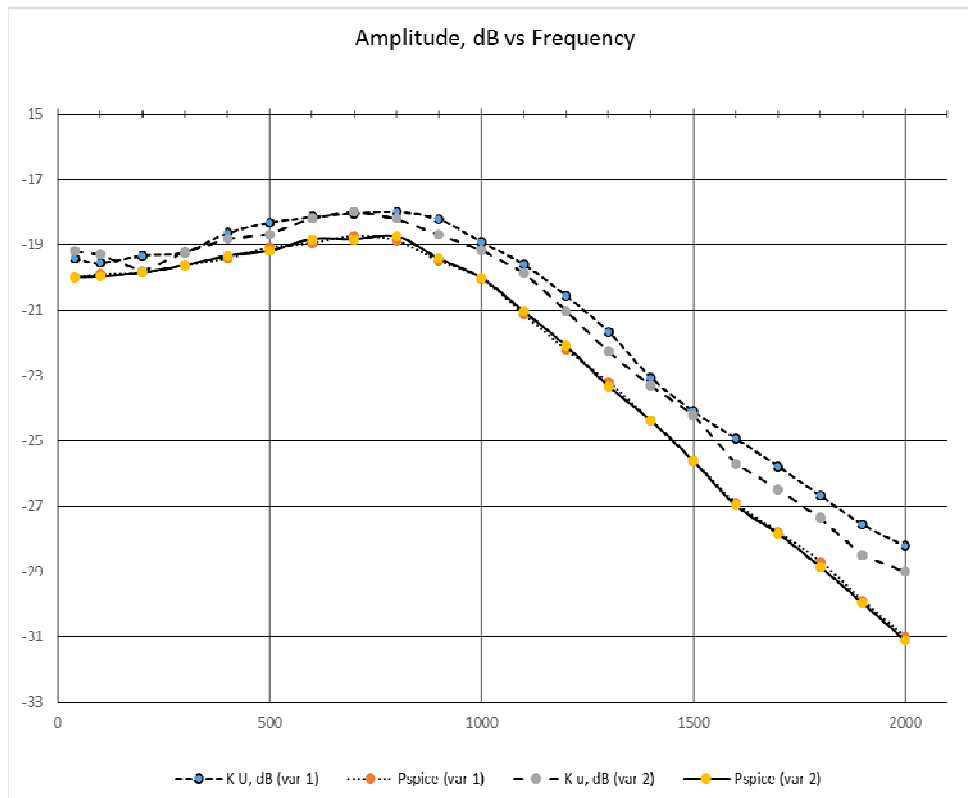


Рис. 11. Результаты моделирования и практических экспериментов фильтров

Используя рассчитанные значения резисторов и конденсаторов, были смоделированы две схемы в программе LTSpice [23]. Первая схема показана на рис.8.

Вторая схема получается модификацией первой схемы (рис.8) путем переключения конденсатора C0204 к выходу ОУ2, а резистора R0205 – к выходу ОУ1.

Были также собраны макеты этих фильтров и сняты их амплитудно-частотные характеристики. Результаты моделирования и практического эксперимента представлены на рис.11 и показывают очень хорошее совпадение.

Выводы

1. Рассмотрено неявное замыкание узлов, при котором аномальный элемент включается параллельно не с одним дуальным аномальным элементом, а с последовательностью из аномальных элементов дуального типа.

2. Показано, что учет параллельного и неявно параллельного соединения при объединении и разъединении двухполюсных элементов может упрощать анализ и уменьшать сложность формируемых выражений.

3. Предложенное преобразование позволяет получать новые структуры на основе перераспределения параллельных элементов, образующихся в результате неявного замыкания.

4. Проведено натурное и компьютерное моделирование эквивалентных вариантов практической схемы с неявно параллельными элементами.

Список литературы

1. Кисель В.А. Аналоговые и цифровые корректоры: Справочник. - Москва: Радио и связь.– 1986.

2. Волгин Л.И. Топологические преобразования и синтез схем радиоэлектронных средств.– Тольятти: Изд-во Поволжского технологического ин-та сервиса.– 2000.– 173 с.

3. Haigh D.G. Analytic approach to nullor transformations for FET circuit synthesis: Part II. Nullator-norator re-pairing and cloning // IEEE Proc. ISCAS.– 2006.– P. 5235–5238.
4. Wierzba G.M. Op-Amp Relocation: A Topological Active Network Synthesis // IEEE Trans. on circuits and systems.– 1986.– Vol. CAS-33, no. 5.– P. 469–475.
5. Сигорский В.П., Петренко А.И. Основы теории электронных схем, Киев: Выща школа, 1971.– 610 с.
6. Оптимальная реализация линейных электронных RLC-схем / Ланнэ А.А., Михайлова Е.Д., Саркисян Б.С., Матвийчук Я.Н.– Киев: Наукова думка, 1981.– 208 с.
7. Нагорный Л.Я. Моделирование электронных цепей на ЭВМ.– Киев: Техника, 1976.– 360 с.
8. Braun J. Topological analysis of networks containing nullators and norators // Electron. Letters.– 1966.– Vol. 2, no. 11.– P. 427–428.
9. Carlin H.J., Youla D.C. Network Synthesis with negative resistors // Proc. Inst. Radio Engrs.– 1961.– Vol. 49.– P. 907.
10. Davies A.C. The significance of nullators, norators and nullors in active-network theory // Radio and Electronic Engineer.– 1967 (November).– Vol.34, Issue 5.– P. 259–267.
11. Soliman A.M., Saad R.A. The voltage mirror-current mirror pair as a universal element // Int. J. circuit theory Appl.–2010.–Vol.38, no.8.–P.787–795.
12. Sanchez-Lopez C., Fernandez F.V., Tlelo-Cuautle E., Tan S.X.-D. Pathological element-based active device models and their application to symbolic analysis // IEEE Trans. on circuits and systems–I: regular papers.– 2011.– Vol. 58, no. 6, P. 1382–1395.
13. Sanchez-Lopes C. Pathological Equivalents of Fully-Differential Active Devices for Symbolic Nodal Analysis // IEEE Trans. on circuits and systems–I: regular papers.– 2013.– Vol. 60, no. 3.– P. 603–615.
14. Bruton L.T., RC-Active Circuits. Theory and Design, Prentice-Hall, 1980.– 523 p.
15. Haigh D.G. Analytic approach to nullor transformations for FET circuit synthesis: Part I - nullator-norator tree transformations // IEEE Proc. ISCAS.– 2006.– P. 5231–5234.

16. Майко Г.В., Филаретов В. В. Эквивалентные преобразования деревьев с нулловыми и зеркальными аномальными элементами в линейных электрических цепях // Синтез, анализ, диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2013.– Вып.11. – С. 17–38.

17. Wang H.Y., Chiang N.H., Nguyen Q.M., Chang S.H. Advanced Materials chapter 26: Circuit Synthesis Using Pathological Elements // Springer Proceedings in Physics.– 2014.– Vol. 152.– P. 317–328.

18. Mayko G., Filaretov V., Gorshkov K. Equivalent transformations of trees with nullor and mirror pathological elements // 2015 IEEE 3rd Workshop on Advances in Information, Electronic and Electrical Engineering (AIEEE).– 2016.

19. Dennis J.E., Schnabel Jr.R.B. Numeric Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations.– Prentice-Hall, 1983.– 378 p.

20. Капустян В.И, Активные RC-фильтры высокого порядка.– М.: Радио и связь, 1985. – 248 с.

21. Makris C.A., Toumazou C. Current-mode active compensation techniques // Electronics Letters, 1990. – IET.

22. <https://www.mathworks.com/help/optim/ug/lsgnonlin.html>

23. <http://www.analog.com/en/design-center/design-tools-and-calculators/lts spice-simulator.html>

Gennadiy Mayko (Майко Геннадий Владимирович) – канд. техн. наук, Sr. Principal Engineer, Broadcom Corporation, USA. E-mail: gmayko@gmail.com

Охад Шмуэль Мамед – студент Doherty Middle School, Andover, MA, USA

Филаретов Владимир Валентинович – доктор технических наук, ответственный редактор международного научного сборника «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей» Ульяновского государственного технического университета.
E-mail: vvfil@mail.ru

СИМВОЛЬНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ МЕТОДОМ СХЕМНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

П. В. Недорезов, В. В. Филаретов

Обсуждаются алгоритмы формирования полиномиальных схемных функций электронных цепей делением их на части. Предложено полиномиальное рекурсивное разложение схемного определителя, предусматривающее резистивную и реактивную (полиномиальную) бисекции. Разработан генератор формул полиномиальной бисекции схемы по произвольному числу узлов. Результаты реализованы в новой версии программы CirSym, которая позволила сформировать впервые полностью символьное полиномиальное выражение для 40-узловой схемы избирательного усилителя.

Algorithms for the formation of polynomial network functions of electronic circuits by dividing them into parts are discussed. The proposed recursive polynomial decomposition of the determinant of the circuit, providing a resistive and reactive (polynomial) bisection. The generator of formulas of polynomial bisection of the circuit on any number of nodes is developed. The results are implemented in a new version of the program CirSym, which allowed for the first time to form a fully symbolic polynomial expression for the 40-node circuit of the selection amplifier.

Генерация схемных функций в полиномиальной форме. Этот вид представления схемных функций и откликов занимает центральное место в проектировании электронных цепей [1]. Тридцатилетие 20-го века (60-е, 70-е, 80-е годы) ознаменовалось активной разработкой методов, алгоритмов и программ формирования схемных функций. Первоначально расчет схемы основывался на матричном представлении и численном решении [2]. Возможности символьных программ ограничивались схемами не более 10 узлов и 20 элементов [3].

Число работ, посвященных символьно-топологическому анализу электрических цепей по частям, было мало, успешные попытки решения задачи были, но они не приводили к наглядному и эффективному решению [4]. Недостатком k -деревьев является возрастание их количества по комбинаторному закону при увеличении числа узлов в подсхеме.

К немногим быстро пришло осознание, что символьный анализ схем в десятки узлов и элементов невозможен без диакоптического (декомпозиционного) расчета путем деления схемы на части, анализа этих подсхем и объединения частичных результатов для получения полного решения [4, 5].

Р.В.Дмитришин, занимающийся проектированием сложных электронных цепей в Львовском политехническом институте, а затем в ОКБ при НИИ телевизионной техники Львовского телевизионного завода «Электрон», первым обратил на это внимание и ввел в рассмотрение d -деревья [6], которые строятся только на полюсах (внешних узлах) подсхемы и имеют вид многолучевой звезды. D -деревья позволили «сжать» пространство k -деревьев и сделать его обозримым.

Наглядность и отсутствие промежуточного математического аппарата в методе D -деревьев привели к эффективной реализации. Уже в 1975 году были опубликованы затраты времени программы АС–7 на генерацию полиномиальных схемных функций ряда схем [7], в том числе для наиболее сложной схемы – избирательного усилителя [2], получившей впоследствии название «теста Лаксберга» (рис. 1, табл. 1). 40-узловая схема замещения содержит 49 резисторов, 35 конденсаторов, 9 источников тока, управляемых напряжением (ИТУН).

Совершенствование программы АС–7 продолжалось до середины 80-х годов прошлого века [8–10]. Результативным также было направление Н.Г.Максимовича (Львовский государственный университет), использующее аппарат схемных множеств и деление графа на части по дугам. Я.Н.Матвийчук предложил внешнюю характеристику подсхемы в виде упорядоченных множеств – кортежей вершин – теоретико-множественный аналог d -дерева [11].

Программы серии ТОПАН (автор Я.Н.Матвийчук [12]) и серии АС [8–10] (реализованы учениками Р.В.Дмитришина), позволяли получать

полиномиальные схемные функции для электронных цепей в десятки узлов и элементов. Обе программы использовались в промышленности, программа ТОПАН была включена в отраслевой стандарт.

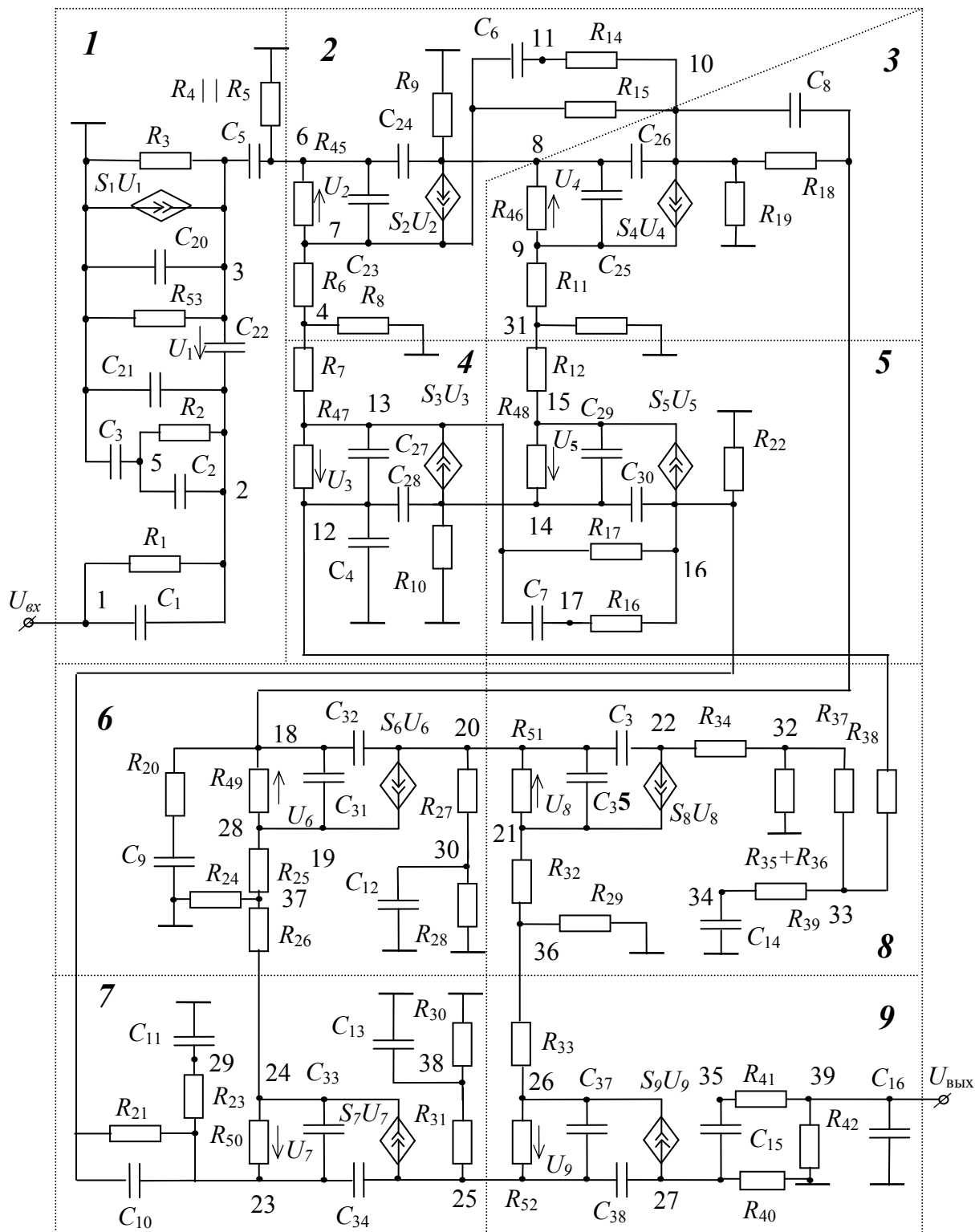


Рис. 1. Схема избирательного усилителя

Таблица 1. Параметры элементов схемы избирательного усилителя на рис. 1

Имя	Параметр	Имя	Параметр	Имя	Параметр
R1	91 кОм	R33	68 Ом	C14	1,5 мкФ
R2	91 кОм	R34	470 Ом	C15	5 мкФ
R3	2,85 кОм	R35+R36	4,4 кОм	C16	360 пФ
R4 R5	23,5 кОм	R37	27 кОм	C20	2 пФ
R6	100 Ом	R38	27 кОм	C21	5 пФ
R7	100 Ом	R39	4,7 кОм	C22	10 пФ
R8	5,6 кОм	R40	4,7 кОм	C23	61 пФ
R9	2,2 кОм	R41	5,1 кОм	C24	8 пФ
R10	2,2 кОм	R42	4,7 кОм	C25	86 пФ
R11	27 Ом	R45	5,25 кОм	C26	8 пФ
R12	27 Ом	R46	3,7 кОм	C27	61 пФ
R13	8,2 кОм	R47	5,25 кОм	C28	8 пФ
R14	2,2 кОм	R48	3,7 кОм	C29	86 пФ
R15	68 кОм	R49	5,28 кОм	C30	8 пФ
R16	2,2 кОм	R50	5,28 кОм	C31	61 пФ
R17	68 кОм	R51	770 Ом	C32	8 пФ
R18	2,7 кОм	R52	770 Ом	C33	61 пФ
R19	1,8 кОм	R53	22 кОм	C34	8 пФ
R20	180 Ом	C1	45 пФ	C35	160 пФ
R21	2,7 кОм	C2	220 пФ	C36	4 пФ
R22	1,8 кОм	C3	1 мкФ	C37	160 пФ
R23	180 Ом	C4	20 мкФ	C38	4 пФ
R24	12 кОм	C5	10 мкФ	S1	0,3 мСм
R25	47 Ом	C6	220 пФ	S2	39 мСм
R26	47 Ом	C7	220 пФ	S3	39 мСм
R27	100 Ом	C8	24 пФ	S4	54 мСм
R28	1,5 кОм	C9	3,3 нФ	S5	54 мСм
R29	3,3 кОм	C10	24 пФ	S6	38 мСм
R30	1,5 кОм	C11	3,3 нФ	S7	38 мСм
R31	100 Ом	C12	10 пФ	S8	120 мСм
R32	68 Ом	C13	10 пФ	S9	120 мСм

Н.И.Ястребов [13], спустя десятилетие после разработки методов d -деревьев и кортежей вершин, представил деление графа на части по дугам как частный случай его деления по вершинам и показал единство подходов Р.В.Дмитришина и Я.Н.Матвийчука. С помощью программы РАСТОР, в которой Н.И.Ястребов реализовал свою трактовку метода d -деревьев, были решены все сложные тесты для программы АС-13ЕС и констатировано совпадение значений полиномиальных коэффициентов.

Учитывая исследования Н.И.Ястребова, следует отметить, что Р.В.Дмитришин и Я.Н.Матвийчук оказались лидерами в «гонке» символично-численного (полиномиального) анализа электронных цепей по частям.

Направленные d -деревья были переоткрыты на Западе (в Польше) почти на десятилетие позже и названы правильными деревьями (*proper trees*) [14]. Зарубежным ученым не удалось реализовать конкурентоспособную программу иерархического объединения подсхем. В числе их тестов были многозвенные лестничные структуры, тогда как популярным советским тестом был (и до сих пор является) избирательный усилитель Лаксберга [2] (рис. 1).

Эта тестовая схема отличается заполненностью элементами, по сравнению со схемами операционных усилителей. Числитель теста Лаксберга делится на подсхемы по 5 узлам, а знаменатель по 4 узлам, тогда как операционный усилитель $\mu A741$ делится на части по 3 и 2 узлам и поэтому существенно проще в анализе, несмотря на большее число узлов и элементов.

Метод d -деревьев (звездных деревьев). Эффективные программные реализации Я.Н.Матвийчука и Ю.И.Шаповалова показали, что для генерации полиномиальных схемных функций, когда комплексный оператор p учитывается в виде единственной символической переменной, целесообразно осуществлять наращивание по одной вершине с инцидентными дугами [11] или даже по одному элементу [9, 10].

Как видно, усилия многих ученых по существу свелись к разработке только одного метода, хотя каждый из них претендовал на разработку своего метода или даже его успешно защитил. Правильно выбранные исходные понятия и математический аппарат (или его отсутствие!) определяют успех исследования. Все гениальное – просто. Теперь подробнее о методе Р.В.Дмитришина (рис. 2) или методе d -деревьев [15].

D -деревья предназначены, как и k -деревья, для отображения свойств подсхемы с u -ветвями и ИТУН, представленной унисторным графом. D -дерево – это множество изолированных групп полюсов подсхемы (компонент связности), которое отображается кодом, состоящим из соответствующих групп номеров полюсов, разделенных запятыми.



Рис. 2. Роман Васильевич Дмитришин – один из основателей Львовской школы символично-топологического анализа электронных цепей. Автор идеи d -дерева.

Первый полюс в каждой группе является корнем, из него есть путь, содержащий единственную дугу, к любому полюсу данной группы, то есть группа является звездным деревом, центром которого служит корень. Поэтому термин «метод звездных деревьев» лучше бы отражал смысл метода, хотя литера « d » идентифицирует фамилию автора.

Полное множество d -деревьев, различающихся между собой, подобно k -деревьям, числом изолированных групп полюсов, числом полюсов в этих группах или корневым полюсом в них, характеризует структурные свойства произвольной подсхемы с n полюсами. Число таких деревьев определяется по формуле [7]

$$D_n = \sum_{k=1}^n C_n^k k^{n-k},$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Количество d -деревьев для произвольных подсхем с $n = 3 \dots 8$ приведено во второй строке табл. 2. Число d -деревьев для подсхем с заземленным полюсом дано в третьей строке этой же таблицы.

Комбинаторный рост числа d -деревьев с увеличением количества вершин объясняет нецелесообразность деления на подсхемы по большому числу вершин и невозможность анализа с заданием символами всех параметров. Для решения такой задачи был использован метод двоичных векторов [16], число которых изменяется по линейному закону. Однако до

сих пор этот метод не удавалось использовать для формирования полиномиальных схемных функций сложных электронных цепей.

Таблица 1. Число d -деревьев и двоичных векторов, характеризующих подсхему

Число полюсов, n	3	4	5	6	7	8
d -деревьев для произвольной подсхемы	10	41	196	1 057	6 322	41 393
d -деревьев для подсхемы с общим полюсом	6	23	104	537	3 100	19 693
Двоичных векторов	6	20	70	252	924	3 432

Генерация полиномов схемных функций востребована в задачах анализа и синтеза электронных цепей [17]. Отсутствие универсальных программ вынуждает разрабатывать специализированные программы вывода полиномов для схем с идентичными подсхемами и численным представлением параметров [18].

Целью данной статьи является обсуждение алгоритмов и программы, реализующей генерацию полиномиальных коэффициентов с символьным представлением всех параметров. В качестве примера будет рассмотрено формирование полиномиальной схемной функции избирательного усилителя на рис. 1.

Программа символьного анализа CirSym [19]. Полиномиальный режим работы реализован в версиях программы CirSym, начиная с 2006 года. Online-сервис этой программы имеется на сайте <http://intersyn.net/cirsym.html>.

Символьный блок программы CirSym с выводом полиномиальных схемных функций и откликов включен в состав программы FASTMEAN для анализа ключевых нелинейных устройств, также находящейся в открытом доступе: <http://www.fastmean.ru>.

Идея обобщения метода схемных определителей для вывода коэффициента полинома заключается в «вырезании» из определителя

слагаемых, имеющих заданную степень [20]. При таком подходе частично сохраняется свертка выражения, обеспечиваемая рекурсивным выделением параметров, что исключает трудоемкое развертывание и повторную свертку слагаемых.

Однако первоначальная реализация полиномиального режима в программе CirSym [20] имела, скорее иллюстративное, учебное, но не практическое значение, поскольку сложность формируемых схемных функций и, особенно, время генерации, на порядки превосходили аналогичные показатели режима компактной свертки (без выделения полиномиальных коэффициентов).

В данной статье обсуждается полиномиальная модернизация и используется новая версия программы CirSym, которая обеспечивают генерацию полиномиальных выражений для сложных тестов, включая избирательный усилитель (рис. 1) и операционный усилитель $\mu A741$.

Полиномиальная модернизация CirSym. Для этого было полностью переработано ядро CirSym – функция `gggp(int n,PASSIVE *matr,int act_n,SOURCE *act,int pln,int st_pln)` и разработана новая функция полиномиальной диакоптики, реализующая диакоптические формулы бисекции схемы по 1–5 узлам: `void formp(int num,GRAPH *ac,char *ac0,int next,char *ext,int n,PASSIVE *matr,int act_n,SOURCE *act,int pln,int st_pln)`.

Функция `gggp`, выполняет рекурсивное разложение определителя, осуществляя выделение параметров и произведений параметров, образующих общий множитель. Аналогичная функция для резистивных или комплексных схем (не полиномиального режима) – `gggf` – вызывается из `gggp` для обработки производных схем, не содержащих емкостей и индуктивностей.

Структура `PASSIVE {char v1; char v2; int kol; char *reb;}` задает соответственно узлы подключения двухполюсника ($kol=1$) или двухполюсников ($kol>1$), а также идентификатор элемента. Структура `SOURCE {char v1; char v2; char v3; char v4; int kol; char *reb;}` дополнительно к управляемым узлам `v1` и `v2` задает управляющие узлы `v3` и `v4` управляемого источника. Переменные `n` и `act_n` хранят количества структур пассивных и активных элементов соответственно.

Специфическая для функции `gggr` переменная `pln` равна текущей степени полинома, достигнутой предшествующим подвыражением. `pln<=st_pln`, где `st_pln` – искомая степень полинома. Очевидно, что `pln=0` в первом обращении к `gggr`.

Функция `formr` дополнительно к названным переменным содержит список `num` двухполюсников и управляемых источников, разбитых на подмножества, относящихся к первой или второй подсхеме. Первые узлы (`v1`) элементов, относящихся к первой подсхеме заменяются на символ «п». Модифицированные первые узлы хранятся в векторе `ас`, а копии оригинальных обозначений – в векторе `ас0`.

Число общих (внешних) узлов подсхем `next` может принимать значения от 1 до 5, что обусловлено разреженностью практических структур. Внешние узлы подсхемы хранятся в векторе `ext`, причем общий базисный узел (узел с номером 0) указывается в списке последним.

Рекурсивное разложение полиномиального определителя.
Выполняется вызовом функции:

```
void gggr(int n,PASSIVE *matr,int act_n,SOURCE *act,int pln,int st_pln) {
...
if (yescL_(n,matr) < st_pln-pln) {fl==2; return;} // степень полинома недостижима
beg: multiplp(&n,matr,&act_n,act,&fl,pln,st_pln); // выделение общих множителей
if (fl == 1 || fl == 2) return; // определитель раскрыт или равен нулю
node_(n,matr,act_n,act,&p1); // определение числа узлов p1 схемы
if (pln > st_pln) {frematr(n,matr); freact(act_n,act);} // степень недостижима
else
if (pln==st_pln) { // степень полинома достигнута
    if (yescL(n,matr)) { // нейтрализация емкостей и индуктивностей
        ...
        goto beg;
    } // резистивная бисекция
    bisec1(n,matr,act_n,act,&fl); // бисекция по одному узлу
    if (fl) return;
    if (flag_fsn && p1 > flag_fsn) { // бисекция по двум узлам
        bisec2(n,matr,act_n,act,&fl,range2);
        if (fl) return;
    }
    if (flag_fi3 && p1 > flag_fi3) { // бисекция по трем узлам
```

```

    bisec3(n,matr,act_n,act,&fl,range3);
    if (fl) return;
}
    if (flag_fi4 && p1 > flag_fi4) { // бисекция по четырем узлам
    bisec4(n,matr,act_n,act,&fl,range4);
    if (fl) return;
}
    if (flag_fi5 && p1 > flag_fi5) { // бисекция по пяти узлам
    bisec5(n,matr,act_n,act,&fl,range5);
    if (fl) return;
}
if (yesg(n,matr)) {
    // выделение активных проводимостей
}
else
if (yesr(n,matr)) {
    // выделение активных сопротивлений
}
else
if (noideal(act_n,act,&first)) {
    // выделение параметров управляемых источников
}
}
else
if (pln < st_pln) // степень полинома не достигнута
{// разложение определителя реактивно-резистивной схемы
    if (yescl(n,matr))
{ // реактивная (полиномиальная) бисекция
    if (flag_1) { // бисекция по одному узлу
    bisec1p(n,matr,act_n,act,&fl,pln,st_pln);
    if (fl) return;}
    if (flag_2 && p1 > flag_2) { // бисекция по двум узлам
    bisec2p(n,matr,act_n,act,&fl,range2p,pln,st_pln);
    if (fl) return;}
    if (flag_3 && p1 > flag_3) { // бисекция по трем узлам
    bisec3p(n,matr,act_n,act,&fl,range3p,pln,st_pln);
    if (fl) return;}
    if (flag_4 && p1 > flag_4) { // бисекция по четырем узлам
    bisec4p(n,matr,act_n,act,&fl,range4p,pln,st_pln);

```

```

if (fl) return;}
if (flag_5 && p1 > flag_5) { // бисекция по пяти узлам
bisec5p(n,matr,act_n,act,&fl,range5p,pln,st_pln);
if (fl) return;}
if (!fl_g && yesg(n,matr)) {
// выделение активной проводимости
}
else
if (yesc(n,matr)) {
// выделение емкостных проводимостей
}
else
if (yesL(n,matr)) {
// выделение индуктивных сопротивлений
}
}
else {frematr(n,matr); freact(act_n,act);} // степень полинома недостижима
}
}

```

Рекурсивные вызовы обеспечили сокращение кода программы и в целом успех реализации программы CirSym. До сих пор в открытом доступе отсутствуют программы аналогичного класса по сложности анализируемых схем и набору допустимых линейных элементов, включающему все типы зеркальных и нулловых аномальных элементов.

Ключевыми параметрами полиномиальной рекурсии являются текущая степень данного рекурсивного вызова pln и искомая степень полинома st_pln . Сравнением этих параметров задаются режимы разложения. При $pln > st_pln$ степень полинома превышена, поэтому из формулы удаляется предшествующее подвыражение до знака сложения, вычитания или до открывающей скобки.

При $pln = st_pln$ степень полинома достигнута, поэтому выполняется нейтрализация реактивных элементов (емкостных проводимостей и индуктивных сопротивлений). После этого выполняется разложение определителя резистивной схемы с использованием обычной бисекции (без передачи степеней и перемножения полиномов).

Ниже рассмотрен наиболее сложный случай $pln < st_pln$, который требует, наряду с выделением реактивных элементов и управляемых источников, выполнения полиномиальной бисекции.

Генератор полиномиальных формул бисекции. Рекурсивное разложение схемного определителя предполагает наращивание формулы. Набранная к некоторому моменту строка характеризуется своей длиной в файле результата `out`: $dl=leng+strlen(c)$. Первое слагаемое равно числу символов, отправленных в файл, а второе слагаемое равно числу символов в строке `c`, находящейся в оперативной памяти.

Текущее значение `dl` соответствует некоторой производной схеме, определитель которой должен быть умножен на предыдущий сомножитель со степенью полинома pln , указанной в обращении к функции `gggr` вместе с искомой степенью st_pln . Таким образом, из текущего определителя необходимо выделить степень $st=st_pln-pln$, а все другие степени вытирать по мере их образования.

Если установлено, что текущая схема делится на подсхемы по 1, 2, 3,4 или 5 узлам, то нужная степень полинома выделяется при перемножении полиномов, соответствующих слагаемым диакоптической формулы бисекции, с помощью генератора полиномиальных формул бисекции.

```
void formp(int num,GRAPH *ac,char *ac0,int next,char *ext,  
          int n,PASSIVE *matr,int act_n,SOURCE *act,int pln,int st_pln) {  
    ...  
    a1 – структура двухполюсников для первого множителя  
    act1 – структура управляемых источников для первого множителя  
    a2– структура двухполюсников для второго множителя  
    act2 – структура управляемых источников для второго множителя  
    a3 - структура двухполюсников первой подсхемы  
    act3 – структура управляемых источников первой подсхемы  
    act5 – структура управляемых источников первой подсхемы (копия)  
    fortrans(num,ac,matr,act,&n1,a3,&act5_n,act5,1,ac0); // первая подсхема  
    a4 - структура двухполюсников второй подсхемы  
    act4 – структура управляемых источников второй подсхемы  
    act6 – структура управляемых источников второй подсхемы  
    ...
```

```

fortrans(num,ac,matr,act,&n2,a4,&act6_n,act6,2,ac0); // вторая подсхема
dl2=leng+strlen(c);

st=st_pln-pln;
// десятичный шаблон: знак слагаемого, десятичные векторы
binvec(n,sn,nus,on);
s=1; // число элементов в десятичном векторе
for (i=1;i<=n;i++) s*=2; s--; // число десятичных векторов
// k и l - десятичные векторы первой и второй половины первого множителя
for (k=0;k<=s;k++) // цикл по первой половине десятичного вектора
for (l=0;l<=s;l++) // цикл по второй половине десятичного вектора
if (on[k]==on[l])
{ // десятичные векторы имеют одинаковое число элементов
act1_n=act5_n; // копирование первой подсхемы
actcopy(act1_n,act5,act3);
if (k) { // добавление неудаляемых управляемых источников (НУИ)
for (i=0;i<on[k]-1;i++) // добавление НУИ в первую подсхему
nuiall(ext[n],ext[nus[k][i]],ext[n],ext[nus[l][i]],&act1_n,act3);
if ((sn[k]+sn[l])%2) // учет отрицательного знака в текущем слагаемом
nuiall(ext[n],ext[nus[k][i]],ext[nus[l][on[k]-1]],ext[n],&act1_n,act3);
else nuiall(ext[n],ext[nus[k][i]],ext[n],ext[nus[l][on[k]-1]],&act1_n,act3);
}
act2_n=act6_n; // копирование второй подсхемы
actcopy(act2_n,act6,act4);
// k_ и l_ - десятичные векторы первой и второй половины второго множителя
k_=s-k; l_=s-l;
for (i=0;i<n-on[k];i++) // добавление НУИ во вторую подсхему
nuiall(ext[n],ext[nus[k_][i]],ext[n],ext[nus[l_][i]],&act2_n,act4);
for (pln1=0; pln1<=st; pln1++)
{ // степень pln1 первого множителя
расcopy(n1,a3,a1); // копия дополненной источниками первой подсхемы
actcopy(act1_n,act3,act1);
dl=leng+strlen(c); // вычисление длины строки в конце текущего слагаемого
if (dl != dl2) strcat(b++, "+"); // вывод в формулу знака сложения
if (n1+act1_n > 1) strcat(b++, "("); // вывод открывающей скобки
dl1=leng+strlen(c); // вычисление текущей длины строки
gggr(n1,a1,act1_n,act1,0,pln1); // вывод первого множителя
if (dl1>=leng+strlen(c)) {ster(dl); continue;}
else if (n1+act1_n > 1) strcat(b++, ")"); // вывод закрывающей скобки

```



```

pascopy(n2,a4,a2); // копия дополненной источниками второй подсхемы
actcopy(act2_n,act4,act2);
pln2=st-pln1; { // степень pln2 первого множителя: pln1+pln2=st
strcat(b+,"*"); // вывод в формулу знака умножения
if (n2+act2_n > 1) strcat(b+,"("); // вывод открывающей скобки
dl1=leng+strlen(c); // вычисление текущей длины строки
gggp(n2,a2,act2_n,act2,0,pln2); // вывод второго множителя
if (dl1>=leng+strlen(c))
ster(dl); // степень не существует – вытирание слагаемого
else if (n2+act2_n > 1) strcat(b+,")"); // вывод закрывающей скобки
}}

```

Вычислительный эффект полиномиальной бисекции проявляется в том, что вместо выбора слагаемых нужной степени st при формировании выражения путем трудоемкого выделения параметров элементов перемножаются степени полиномов $pln1$ и $pln2$ параметров (двоичных векторов) двух подсхем, обеспечивающих требуемое условие $st=pln1+pln2$.

Генерация символьных полиномиальных коэффициентов. Новая версия программы CirSym (с полиномиальной бисекцией) стала одним из самых эффективных инструментов символьного анализа электронных цепей [23]. Полиномиальные коэффициенты схем замещения операционных усилителей $\mu A725$ (33 узла, 71 резистор, 46 конденсаторов и 26 ИТУН) и $\mu A741$ (76 узлов, 115 резисторов, 76 конденсаторов и 26 ИТУН) рассчитываются программой CirSym за время от нескольких минут до одного часа.

Более сложной для символьного анализа является схема замещения избирательного усилителя Лаксберга (40 узлов, 49 резисторов, 35 конденсаторов, 9 ИТУН) вследствие большей плотности (рис. 1).

Формирование символьных выражений для полиномиальных коэффициентов знаменателя передаточной функции по напряжению избирательного усилителя (рис.1) выполнялось программой CirSym на ноутбуке с процессором 2,4ГГц. В табл. 2 сведены показатели этих расчетов. Используемые численные значения параметров взяты из табл.1.

Таблица 2. Полиномиальные коэффициенты избирательного усилителя – тестовой схемы Лаксберга (рис. 1)

Сте- пень поли- нома	Длина выраже- ния, в симво- лах	Время генерации, час_мин_ сек	Значение коэффициента (calcsym)	Эталонное значение (Mathematica)
0	12418	00 00 00	4.271102855938e-100	4.271102855938e-100
1	233952	00 00 03	2.576431552084e-100	2.576431552084e-100
2	1359824	00 00 14	4.457643049776e-101	4.457643049776e-101
3	2956837	00 00 29	2.228480145120e-102	2.228480145120e-102
4	6431513	00 01 04	1.364760602717e-104	1.364760602717e-104
5	11222660	00 01 07	4.509270557587e-109	4.509270557587e-109
6	17429529	00 01 45	4.899747405828e-114	4.899747405828e-114
7	24165657	00 03 22	2.979954600444e-119	2.979954600444e-119
8	31643412	00 08 26	2.622956997494e-124	2.622956997494e-124
9	37367782	00 12 49	1.486891290592e-129	1.486891290592e-129
10	31196251	00 06 07	2.951695013363e-135	2.951695013363e-135
11	43585812	00 10 20	2.467910446662e-141	2.467910446662e-141
12	45482515	00 12 35	9.106813964128e-148	9.106813964128e-148
13	47774786	00 32 04	1.365797920617e-154	1.365797920617e-154
14	48236621	00 32 47	7.660503230729e-162	7.660503230729e-162
15	48378097	00 52 49	1.579312813489e-169	1.579312813489e-169
16	48311042	00 58 18	1.492761594121e-178	1.492761594121e-178
17	47985696	01 06 06	-2.500883035180e-185	-2.500883035180e-185
18	47174058	01 14 01	-1.056633694623e-193	-1.056633694623e-193
19	45495002	01 28 21	1.022422951518e-201	1.022422951518e-201
20	42515278	06 54 26	2.746672190893e-210	2.746672190893e-210
21	37944870	01 51 58	-3.467019883846e-218	-3.467019883846e-218
22	31844989	02 07 15	4.463922159411e-227	4.463922159411e-227
23	24729111	02 23 16	1.863962860411e-235	1.863962860411e-235
24	24440823	01 39 28	-4.241982540952e-244	-4.241982540952e-244
25	14440308	01 53 12	-1.983282452911e-253	-1.983282452911e-253
26	7447958	02 26 33	9.622700117954e-262	9.622700117954e-262
27	17293194	00 47 16	-1.740045135688e-271	-1.740045135688e-271
28	1237826	04 51 25	-7.124102033096e-280	-7.124102033096e-280
29	366183	03 04 58	1.600829431897e-289	1.600829431897e-289
30	77240	02 56 16	1.751973979145e-298	1.751973979145e-298
31	9280	05 48 26	2.495161010935e-308	2.495161010935e-308
32	486	03 35 03	7.632963409786e-319	7.632963409786e-319

Контрольный расчет численных значений коэффициентов выполнялся на универсальной математической системе Математика по компактному (без выделения полиномиальных коэффициентов) выражению этой передаточной функции, также сформированному программой CirSym, но в неполиномиальном режиме.

Ниже в качестве иллюстрации приведено выражение коэффициента полинома 32-й степени:

```
detan= (  
(((c5*(c2*(c20*((c22+c21+c1+c3))+c22*((c21+c1+c3)))+c3*(c20*(  
(c22+c21+c1))+c22*((c21+c1)))))*(g6*(c6*(c26*(c23*(c24*(c25*(  
(g12+g13+g11)))))))*(c7*(c29*(c27*(c30*(c28)))))+(c6*(c26*(c23*(  
(c24*(c25*(g12+g13+g11)))))))*(c7*(c29*(c28*(c30*(c27*(g7+g8)))))))*  
(c10))*(((c34*(c33*(g26+g25+g24)))*(c13)*(c15*(c16*(c38*(  
(c37*(g33+g32+g29)))))))*(c32*((c9*(c8))*(c31)))*(  
(c4*(c14*(c35*(c36*((g35+g34)*((g39+g38+g37))+g37*(g39+g38)))))))* (c12))))*c11  
);
```

Length of expression = 486 characters Execution time: 3 hour 35 min. 03.01sec.

Выводы

1. Рекурсивное разложение схемных определителей обобщено для формирования полиномиальных выражений. 2. Разработан алгоритм полиномиальной бисекции схемы по произвольному числу узлов. 3. Результаты реализованы в новой версии программы CirSym, которая позволила получить полиномы передаточных функций для схем замещения операционных усилителей $\mu A725$ и $\mu A741$ в десятки-сотни узлов и элементов. 4. Впервые получено символьное полиномиальное выражение для практической схемы с наиболее заполненной структурой – избирательного усилителя Лаксберга.

Список литературы

1. Дмитришин Р.В. Оптимизация электронных схем на ЭВМ.– К.: Техника, 1980.– 224 с.
2. Лаксберг Э.А. Частотный анализ линейных электронных схем с помощью ЭЦВМ на основе u -матрицы // Автоматизация проектирования в электронике.– Киев, 1973.– Вып. 8.– С. 22–32.
3. Дмитришин Р.В. Расчёт линейных цепей методом расширенных структурных чисел // Изв. вузов СССР. – Радиоэлектроника. – 1969. – Т. 12, № 8. – С. 806–813.
4. Курганов С.А., Полях О.И., Филаретов В.В., Ястребов Н.И. От d -деревьев к нулловым схемам // Синтез, анализ, диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2009.– Вып. 7.– С. 277–321.

5. Матвийчук Я.Н. Топологический метод определения характеристического полинома электронной схемы по частям // Теоретическая электротехника и машинное проектирование электронных цепей.– Киев, 1973.– С. 192–200.
6. Дмитришин Р.В., Шаповалов Ю.И. Об одном алгоритме нахождения параметров линейных радиосхем на ЭВМ // Всесоюзная конф. «Современные методы и аппаратура для измерения параметров радиотехнических цепей».– Новосибирск: Сибирский науч. исследовательский ин-т метрологии, 1973.– С. 30–33.
7. Дмитришин Р.В., Шаповалов Ю.И. Диакоптический алгоритм анализа сложных линейных цепей на ЭВМ // Автоматизация проектирования в электронике.– Киев: Техника, 1975.– Вып.12. –С. 42–46.
8. Дмитришин Р.В., Шаповалов Ю.И. Вычисление схемных функций при многовариантном анализе схем // Изв. вузов СССР. – Радиоэлектроника.– 1978.– Т. 21, № 6.– С. 151–153.
9. Березко Л.А., Шаповалов Ю.И. Реализация метода подсхем при символическом анализе линейных схем // Изв. вузов СССР. – Радиоэлектроника.– 1980.– Т. 23, № 6.– С. 21–25.
10. Шаповалов Ю.И., Давидюк Р.Д. Особенности реализации метода топологического анализа схем в программе *AC13EC* // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника, 1983.– Т. 26, № 6.– С. 79–81.
11. Матвийчук Я.Н. Разработка метода и программы анализа линейных схем по частям // Теоретическая электротехника.– Львов, 1980.– Вып. 29.– С. 41–52.
12. Ланнэ А.А., Михайлова Е.Д., Саркисян Б.С., Матвийчук Я.Н. Оптимальная реализация линейных электронных *RLC*-схем.– Киев: Наук. думка, 1982.– 208 с.
13. Ястребов Н.И. Повышение эффективности декомпозиционных алгоритмов символьного анализа // Радиоэлектроника.– 1985.– № 6.– С. 102–104.
14. Starzyk J., Sliwa E. Upward topological analysis of large circuits using directed graph representation // IEEE Transactions on circuits and systems.– 1984.– N 4.– P. 410–414.

15. Дмитришин Р.В. Полиномиальные методы символьного анализа электрических цепей: Дис. ... д-ра техн. наук: 05.09.05 (Теорет. электротехника) / Гос. ун-т «Львовская политехника».–Львов, 1996.–284 с.
16. Филаретов В.В. Метод двоичных векторов для топологического анализа электронных схем по частям // Электричество.– 2001.– № 8.– С. 33–42.
17. Гридин В.Н., Михайлов В.Б., Шустерман Л.Б. Численно-аналитическое моделирование радиоэлектронных схем / Отв. ред. Е.В. Емельянова; Центр информ. технологий в проектировании РАН.– М.: Наука, 2008.– 339 с.
18. Горшков К.С. Методика анализа системы электрических межсоединений в интегральных микросхемах // Электросвязь. – 2017. – №4. – С. 45–50.
19. Филаретов В. В. Программа символьного анализа CIRSYM: история создания, структура и функции // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2012.– Вып. 10.– С.158–171.
20. Курганов Д.С., Филаретов В.В. Алгоритм и программа формирования полиномиальных схемных функций электронных цепей.– 2008.– Вып. 6.– С. 152–164.
21. Недорезов М.В., Филаретов В.В. Алгебраический анализ зеркально-нуллорных схем на основе выделения аномальных элементов // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2016.– Вып. 13.– С. 33–46.
22. Недорезов П.В., Филаретов В.В. Метод десятичных векторов для символьного анализа электрических цепей по частям // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2018.– Вып. 15.
23. Shi G., Tan S.X.-D., Tlelo-Cuautle E. Advanced Symbolic Analysis for VLSI Systems-Methods and Applications.– New York: Springer, 2014.

Недорезов Петр Владимирович – студент Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета – ЛЭТИ им. В.И.Ленина.
E-mail: pyatakry@rambler.ru

СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДВУХПОЛЮСНИКА БЕЗ ЗАВИСИМОСТИ ВОЛЬТАМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОТ ВНЕШНЕЙ ЦЕПИ

Д. В. Шушпанов

Рассмотрена классическая схема замещения диода, использующая кусочно-линейную аппроксимацию вольтамперной характеристики (ВАХ) и отличающаяся зависимостью ВАХ от внешней цепи. Предложена новая схема замещения диода, у которой ВАХ не зависит от внешних элементов. Показано, что использование аналитического метода расчета позволяет снизить относительную погрешность расчета до погрешности представления вещественных чисел.

The classical circuit for the replacement of a diode is considered, using a piecewise linear approximation of the I-V characteristic. Shows its lack – the dependence of the I-V characteristic of the diode from the external circuit. The new circuit for replacing the diode is proposed, in which the I-V characteristic does not depend on external elements. It is shown that the use of the analytical calculation method instead of the numerical one allows to reduce the relative error of the calculation to practically inaccurate representation of fractional numbers in the calculation program

О схемах замещения нелинейных элементов. Современные электронные устройства всегда содержат в своем составе нелинейные элементы. Поэтому программы схемотехнического моделирования должны включать достаточно точные модели нелинейных элементов, в том числе диодов.

Самый распространенный метод расчета цепей с нелинейными элементами – это метод Ньютона – Рафсона [1, 2]. Он позволяет рассчитать схемы с нелинейными элементами (НЭ), имеющими сколь угодно сложную вольтамперную характеристику (ВАХ). Однако увеличение количества нелинейных элементов, усложнение их ВАХ, уменьшение шага расчета (для увеличения точности расчета) приводит к

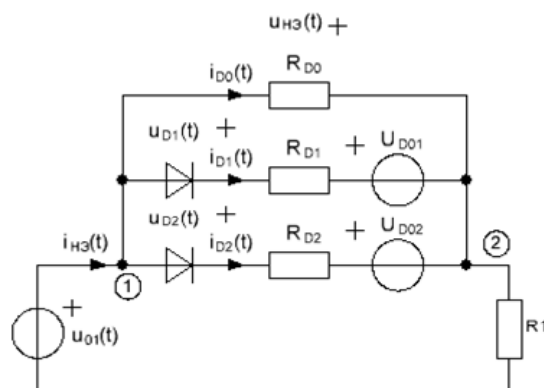


Рис. 1. Схема расчета ВАХ нелинейного элемента
(классическая схема замещения НЭ с тремя параллельными ветвями)

увеличению времени расчета цепи. Отсутствие хороших начальных приближений может привести к отказу программы или к некорректному расчету цепи.

Поэтому для упрощения расчета используют кусочно-линейную аппроксимацию вольтамперной характеристики НЭ. Особенно это актуально для силовой электроники, использующей ключевые режимы усиления полупроводниковых приборов. Для использования кусочно-линейной аппроксимации ВАХ нелинейного элемента в электрической цепи необходимо представить данный элемент схемой замещения.

Классическая схема замещения нелинейного элемента [3, 4]. Эта схема состоит из параллельных ветвей с идеальными диодами. Для упрощения расчетов схема замещения будет содержать 3 ветви (рис. 1). При определении ВАХ схемы к НЭ подключается источник напряжения и резистор.

Согласно [4] найдем параметры схемы замещения, так чтобы ВАХ нелинейного элемента проходила через следующие характерные точки ($U_0 = 0$ В, $I_0 = 0$ А; $U_1 = 10$ В, $I_1 = 0,1$ А; $U_2 = 20$ В, $I_2 = 0,4$ А; $U_3 = 30$ В, $I_3 = 0,9$ А): $R_{D0} = 100$ Ом, $R_{D1} = R_{D2} = 50$ Ом, $U_{D01} = 10$ В, $U_{D02} = 20$ В. Назовем такую вольтамперную характеристику планируемой ВАХ.

Заменим на рис. 1 ветви с идеальными диодами на источники тока и составим систему уравнений по методу узловых напряжений:

$$\begin{cases} u_1(t) = u_{o1}(t) \\ -\frac{1}{R_{D0}}u_1(t) + \left(\frac{1}{R_{D0}} + \frac{1}{R_1}\right)u_2(t) = i_{D1}(t) + i_{D2}(t) \end{cases} \quad (1)$$

Далее составляем уравнение по закону напряжений Кирхгофа (ЗНК) для ветвей, содержащих диоды:

$$\begin{cases} -u_1(t) - u_{D1}(t) + i_{D1}(t)R_{D1} + U_{D01} + u_2(t) = 0 \\ -u_1(t) - u_{D2}(t) + i_{D2}(t)R_{D2} + U_{D02} + u_2(t) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Объединив (1) и (2), получаем систему уравнений для схемы (рис. 1)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/R_{D0} & 1/R_{D0} + 1/R_1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & 1 & R_{D1} & 0 \\ -1 & 1 & 0 & R_{D2} \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ i_{D1}(t) \\ i_{D2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{01}(t) \\ 0 \\ u_{D1}(t) - U_{D01} \\ u_{D2}(t) - U_{D02} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

которую можно переписать в следующем виде [5, 6]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{A}_1 \\ -\mathbf{A}_2^T & \mathbf{R}_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_y \\ \mathbf{I}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_D - \mathbf{U}_{D0} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

Делаем следующие преобразования [5, 6]:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\vartheta = \mathbf{A}_2^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A}_1 + \mathbf{R}_D \\ \mathbf{U}_\vartheta = -\mathbf{A}_2^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_{D0} \end{cases} \quad (5)$$

и получаем

$$\mathbf{R}_\vartheta = \begin{pmatrix} R_{D1} + \frac{R_{D0}R_1}{R_{D0} + R_1} & \frac{R_{D0}R_1}{R_{D0} + R_1} \\ \frac{R_{D0}R_1}{R_{D0} + R_1} & R_{D2} + \frac{R_{D0}R_1}{R_{D0} + R_1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_\vartheta = \begin{pmatrix} U_{D01} - u_{01}(t) \frac{R_{D0}}{R_{D0} + R_1} \\ U_{D02} - u_{01}(t) \frac{R_{D0}}{R_{D0} + R_1} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Таким образом, вместо системы (4), названную в литературе смешанной линейной проблемой взаимозависимости (mixed linear complementarity problem – MLCP) [5], получаем систему, которая определяет токи и напряжения на идеальных диодах [5–7]:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_D = \mathbf{R}_\vartheta \cdot \mathbf{I}_D + \mathbf{U}_\vartheta, \\ \mathbf{I}_D, \mathbf{U}_D \geq 0, \\ \mathbf{I}_D^T \cdot \mathbf{U}_D = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Решение системы (7) для двухмерного случая будет равно [5–7]:

$$\begin{aligned}
u_{D1}(t) &= \left[R_{Э12} \left[\frac{-u_{Э2}(t)}{R_{Э22}} \right] + u_{Э1}(t) \right], & i_{D1}(t) &= \left[-\frac{R_{Э12}}{R_{Э11}} \left[\frac{-u_{Э2}(t)}{R_{Э22}} \right] - \frac{u_{Э1}(t)}{R_{Э11}} \right], \\
u_{D2}(t) &= \left[R_{Э21} \left[\frac{-u_{Э1}(t)}{R_{Э11}} \right] + u_{Э2}(t) \right], & i_{D2}(t) &= \left[-\frac{R_{Э21}}{R_{Э22}} \left[\frac{-u_{Э1}(t)}{R_{Э11}} \right] - \frac{u_{Э2}(t)}{R_{Э22}} \right].
\end{aligned} \tag{8}$$

где $\lfloor x \rfloor$ – функция, названная в [5, 7] передачей модуля (modulus transform):

$$y = \lfloor x \rfloor \rightarrow \begin{cases} y = x, & x \geq 0 \\ y = 0, & x < 0 \end{cases} \rightarrow y = \frac{x + |x|}{2}. \tag{9}$$

Подставляем (6) в (8) и получаем токи через идеальные диоды для схемы (рис. 1):

$$i_{D1}(t) = \frac{1}{R_{D1} \frac{R_{D0} + R_1}{R_{D0} R_1} + 1} \left[\frac{u_{01}(t)}{R_1} - U_{D01} \frac{R_{D0} + R_1}{R_{D0} R_1} - \left[\frac{u_{01}(t) - U_{D02} \frac{R_{D0} + R_1}{R_{D0}}}{R_{D2} \frac{R_{D0} + R_1}{R_{D0}} + R_1} \right] \right], \tag{10}$$

$$i_{D2}(t) = \frac{1}{R_{D2} \frac{R_{D0} + R_1}{R_{D0} R_1} + 1} \left[\frac{u_{01}(t)}{R_1} - U_{D02} \frac{R_{D0} + R_1}{R_{D0} R_1} - \left[\frac{u_{01}(t) - U_{D01} \frac{R_{D0} + R_1}{R_{D0}}}{R_{D1} \frac{R_{D0} + R_1}{R_{D0}} + R_1} \right] \right]. \tag{11}$$

Заменяя ветви с идеальными диодами на источники тока, находим ток и напряжение на НЭ

$$i_{НЭ}(t) = \frac{u_{01}(t) + (i_{D1}(t) + i_{D2}(t)) R_{D0}}{R_1 + R_{D0}}, \tag{12}$$

$$u_{НЭ}(t) = -R_{D0} \frac{u_{01}(t) - (i_{D1}(t) + i_{D2}(t)) R_1}{R_1 + R_{D0}}. \tag{13}$$

Результаты расчета ВАХ НЭ. На основе (10)–(13) с помощью программы MathCAD строим ВАХ нелинейного элемента, а также планируемую ВАХ НЭ (рис. 2). В качестве параметров нелинейного элемента используем значения, рассчитанные ранее ($R_{D0} = 100$ Ом, $R_{D1} = R_{D2} = 50$ Ом, $U_{D01} = 10$ В, $U_{D02} = 20$ В).

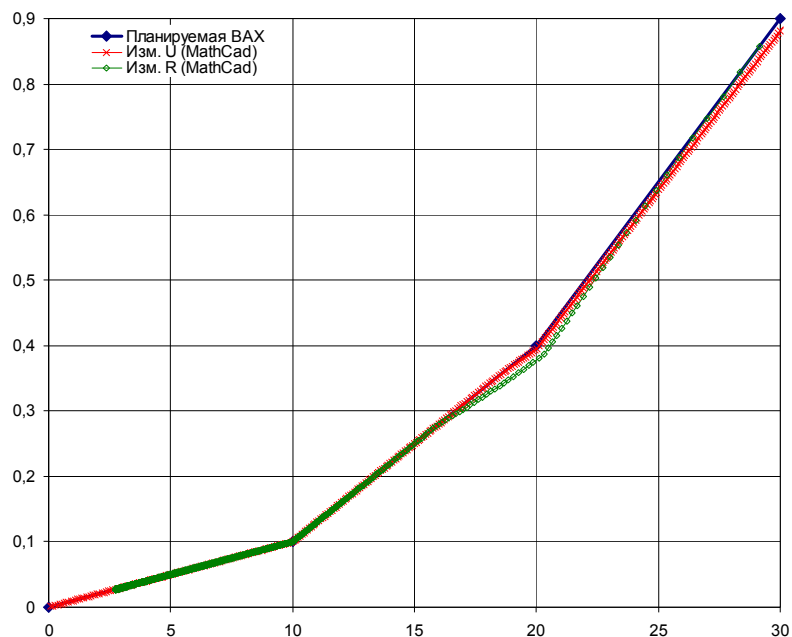


Рис. 2. ВАХ нелинейного элемента (рис. 1): планируемая и рассчитанная согласно (10) – (13) при изменении напряжения или сопротивления

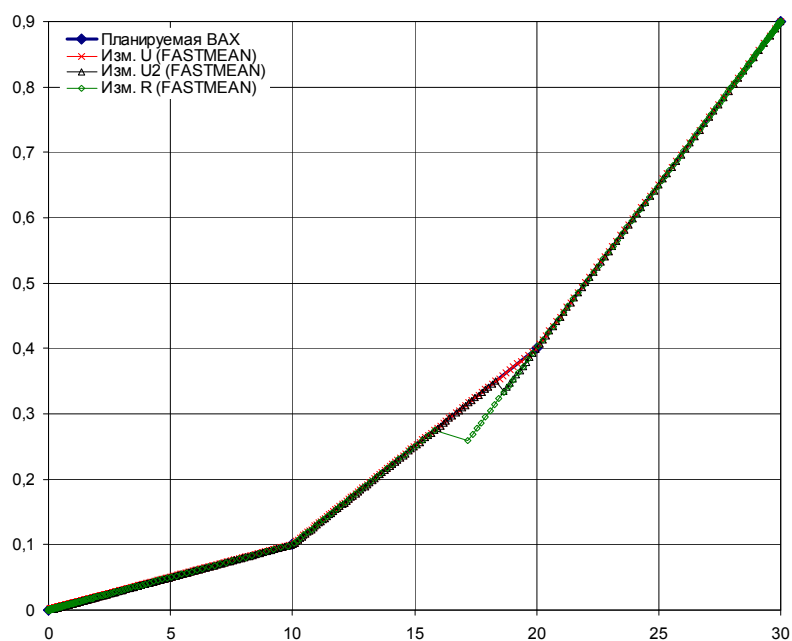


Рис. 3. ВАХ нелинейного элемента: планируемая и рассчитанная в программе FASTMEAN при изменении напряжения или сопротивления

Для построения ВАХ использовалось сопротивление $R_1 = 10$ Ом, а напряжение U_{01} менялось от 0,1 В до 39 В. В программе MathCAD при варьировании входного напряжения U_{01} получаем следующие значения второй и третьей характерных точек ВАХ (рис. 1): $U_2 = 20,043$ В, $I_2 = 0,396$ А; $U_3 = 30$ В, $I_3 = 0,881$ А. Поскольку в месте подключения второго идеального диода сопротивление всего НЭ становилось

соизмеримым с R_1 , то изменились условия включения второго идеального диода, а также третья ветвь ВАХ НЭ (рис. 2).

При варьировании сопротивления R_1 от 1 мкОм до 10 МОм ($U_{01} = 30$ В) изменилась не только вторая характерная точка ($U_2 = 20,327$ В, $I_2 = 0,387$ А), но и количество перегибов ВАХ – вместо трех стало пять (рис. 2). Это также связано с соизмеримостью входного сопротивления НЭ и сопротивления R_1 . Только в этом случае эта зависимость более сложная (выражения (10) и (11)).

Аналогичные исследования ВАХ нелинейного элемента (рис. 1) были проведены с использованием численного метода с использованием программы FASTMEAN [8] (рис. 3). При варьировании напряжения U_{01} вольтамперная характеристика НЭ полностью повторяет планируемую ВАХ (рис. 3), что по точности похоже на аналитический метод (ошибка момента переключения в третьем знаке). При увеличении точности расчета в программе FASTMEAN происходит ошибка переключения – второй диод включается раньше (рис. 3).

При варьировании сопротивления R_1 в программе FASTMEAN также происходит ошибка переключения – второй диод включается ещё раньше (рис. 3). Изменение точности расчета картину не меняет. Новое условие переключения второго диода (рис. 3) близко к новому перегибу ВАХ НЭ, построенной в программе MathCAD (рис. 2), что подтверждает соответствие результатов расчета.

На основании изложенного можно заключить, что схема, состоящая из параллельных ветвей с идеальными диодами, не всегда подходит для использования в качестве схемы замещения НЭ, поскольку её ВАХ зависит от подключаемых элементов. Её можно использовать лишь в том случае, когда сопротивление НЭ не соизмеримо с сопротивлением внешней цепи. Это применимо к диодам, так как они имеют малое сопротивление во включенном состоянии и большое – в выключенном. Тем не менее, следует оценить к какой погрешности расчета приведет данный расчет (не получится ли накопление ошибки, не произойдет ли переключение при других условиях и т.д.). В случае же НЭ, имеющего сложную ВАХ, данная схема замещения НЭ (рис. 1) является не удовлетворительной.

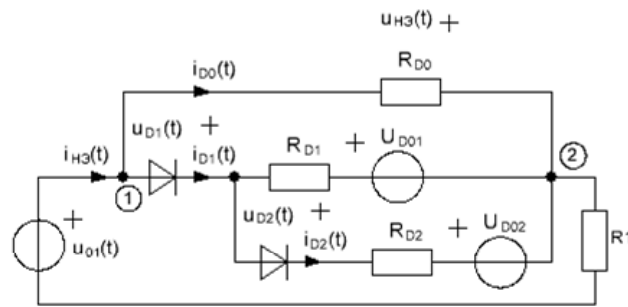


Рис. 4. Схема расчета ВАХ нелинейного элемента (предложенная альтернативная схема замещения НЭ)

Как правило, в программах схемотехнического моделирования, использующих кусочно-линейную аппроксимацию ВАХ нелинейных элементов (например, FASTMEAN), при представлении НЭ не используется данная схема замещения (рис. 1). Модель представляется математически, и ВАХ нелинейного элемента не зависит от подключаемых элементов.

В случаях, когда нелинейные элементы представляются с помощью идеальных диодов [5–7], то для представления любого НЭ необходима схема замещения. Предложенная в [5] классическая схема замещения НЭ (рис. 1) не годится, так как её ВАХ зависит от подключаемых элементов, что может привести к некорректным расчетам.

Схема замещения нелинейного элемента без зависимости от внешней цепи. Предлагаемая схема замещения показана на рис. 4. Для определения её ВАХ также подключается источник напряжения и резистор.

Заменим ветви с идеальными диодами (рис. 4) на источники тока и для полученной цепи составим систему уравнений по методу узловых напряжений:

$$\begin{cases} u_1(t) = u_{o1}(t) \\ -\frac{1}{R_{D0}}u_1(t) + \left(\frac{1}{R_{D0}} + \frac{1}{R_1}\right)u_2(t) = i_{D1}(t) \end{cases} \quad (14)$$

Далее составляем уравнение по ЗНК для ветвей, содержащих идеальные диоды:

$$\begin{cases} -u_1(t) - u_{D1}(t) + (i_{D1}(t) - i_{D2}(t))R_{D1} + U_{D01} + u_2(t) = 0 \\ -u_{D2}(t) + i_{D2}(t)R_{D2} + U_{D02} - U_{D01} - (i_{D1}(t) - i_{D2}(t))R_{D1} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Объединив (14) и (15), получаем систему уравнений для данной цепи (рис. 4)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/R_{D0} & 1/R_{D0} + 1/R_1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 1 & R_{D1} & -R_{D1} \\ 0 & 0 & -R_{D1} & R_{D1} + R_{D2} \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ i_{D1}(t) \\ i_{D1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{01}(t) \\ 0 \\ u_{D1}(t) - U_{D01} \\ u_{D2}(t) - U_{D02} + U_{D01} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

из которой согласно (5) получаем

$$\mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} R_{D1} + \frac{R_{D0}R_1}{R_{D0} + R_1} & -R_{D1} \\ -R_{D1} & R_{D1} + R_{D2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_3 = \begin{pmatrix} U_{D01} - u_{01}(t) \frac{R_{D0}}{R_{D0} + R_1} \\ U_{D02} - U_{D01} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (8), определяем токи, протекающие через идеальные диоды:

$$i_{D1}(t) = \left[\frac{u_{01}(t) \frac{R_{D0}}{R_{D0} + R_1} - U_{D01}}{R_{D1} + \frac{R_{D0}R_1}{R_{D0} + R_1}} \right], \quad (18)$$

$$\begin{aligned} i_{D2}(t) &= \left[\frac{R_{D1}}{R_{D1} + R_{D2}} \left[\frac{u_{01}(t) \frac{R_{D0}}{R_{D0} + R_1} - U_{D01}}{R_{D1} + \frac{R_{D0}R_1}{R_{D0} + R_1}} \right] - \frac{U_{D02} - U_{D01}}{R_{D1} + R_{D2}} \right] = \\ &= \left[\frac{R_{D1}i_{D1}(t) - (U_{D02} - U_{D01})}{R_{D1} + R_{D2}} \right], \end{aligned} \quad (19)$$

а также напряжения на идеальных диодах

$$u_{D1}(t) = \left[U_{D01} - u_{01}(t) \frac{R_{D0}}{R_{D0} + R_1} \right], \quad (20)$$

$$\begin{aligned} u_{D2}(t) &= \left[-R_{D1} \left[\frac{u_{01}(t) \frac{R_{D0}}{R_{D0} + R_1} - U_{D01}}{R_{D1} + \frac{R_{D0}R_1}{R_{D0} + R_1}} \right] + U_{D02} - U_{D01} \right] = \\ &= \left[U_{D02} - U_{D01} - R_{D1}i_{D1}(t) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Заменяя идеальные диоды на источники напряжения, находим ток и напряжение на НЭ

$$\begin{aligned}
u_{\text{НЭ}}(t) &= u_{\text{D1}}(t) + u_{\text{D2}}(t) - i_{\text{D2}}(t)R_{\text{D2}} - U_{\text{D02}} = \\
&= \left[U_{\text{D01}} - u_{\text{01}}(t) \frac{R_{\text{D0}}}{R_{\text{D0}} + R_1} \right] + \left[U_{\text{D02}} - U_{\text{D01}} - R_{\text{D1}}i_{\text{D1}}(t) \right] - \\
&\quad - \left[\frac{R_{\text{D1}}i_{\text{D1}}(t) - (U_{\text{D02}} - U_{\text{D01}})}{R_{\text{D1}} + R_{\text{D2}}} \right] R_{\text{D2}} - U_{\text{D02}}, \quad (22)
\end{aligned}$$

$$i_{\text{НЭ}}(t) = i_{\text{D1}}(t) + i_{\text{D0}}(t) = i_{\text{D1}}(t) - u_{\text{НЭ}}(t)/R_{\text{D0}}. \quad (23)$$

Результаты расчета ВАХ НЭ. Используя (18), (19), (22) (23), в программе MathCAD строим ВАХ нелинейного элемента (рис. 5). Используем те же самые параметры нелинейного элемента. Получается что при варьировании напряжения U_{01} от 0,1 В до 39 В ($R_1 = 10$ Ом) и при варьировании сопротивления R_1 от 1 мкОм до 10 Мом ($U_{01} = 30$ В) получаем одинаковую ВАХ, что и планировалось (рис. 5).

Аналогичные результаты получаем и при использовании численного метода, используя программу FASTMEAN (рис. 6). Отсюда с учетом рис. 5 и 6 следует, что предложенная схема имеет ВАХ, которая не зависит от подключаемых к ней элементов.

Погрешность расчета ВАХ НЭ. Для оценки близости характеристик, рассчитанных в FASTMEAN и MathCAD, они были сравнены с планируемой ВАХ нелинейного элемента, которую можно представить:

$$I_{\text{НЭ}}(U_{\text{НЭ}}) = \begin{cases} 0,01 \cdot U_{\text{НЭ}}, & U_{\text{НЭ}} < 10 \\ 0,03 \cdot U_{\text{НЭ}} - 0,2, & 10 \leq U_{\text{НЭ}} < 20. \\ 0,05 \cdot U_{\text{НЭ}} - 0,6, & U_{\text{НЭ}} > 20 \end{cases} \quad (24)$$

На рис. 7 представлена относительная погрешность расчета ВАХ НЭ в программе FASTMEAN. Из рис. 7 следует, что при изменении как сопротивления, так и напряжения, возникают близкие погрешности расчета ВАХ НЭ. Максимальная погрешность возникает при расчете малых чисел и составляет 20%. Далее она экспоненциально убывает и делает скачки при переходе с одной ветви ВАХ на другую. Экспоненциальная зависимость погрешности связана с тем, что в программе FASTMEAN каждая точка расчета сравнивается с абсолютным значением погрешности. Чем меньше значение, тем больше относительная

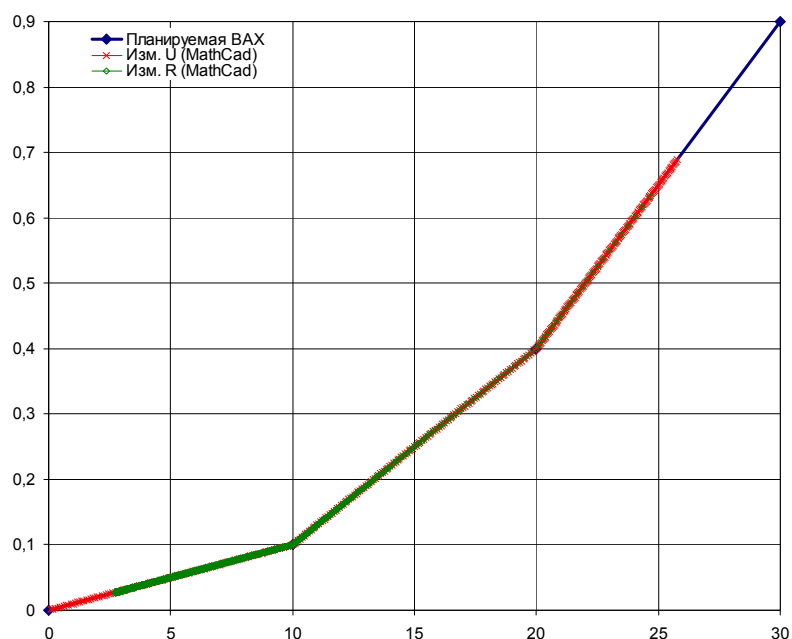


Рис. 5. VAX нелинейного элемента (рис. 4): планируемая и рассчитанная согласно (18), (19), (22) (23) при изменении напряжения или сопротивления

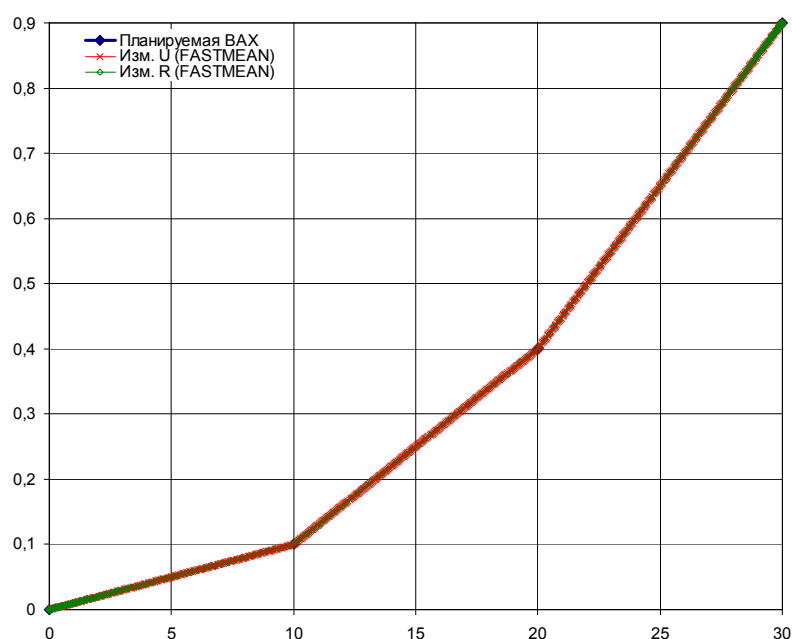


Рис. 6. VAX нелинейного элемента: планируемая и рассчитанная в программе FASTMEAN при изменении напряжения или сопротивления

погрешность этой точки расчета. Минимальная относительная погрешность расчета составляет $4 \cdot 10^{-14}$.

При расчете VAX НЭ по (22), (23) в программе MathCAD видно, что получившаяся относительная погрешность расчета не превышает $8,3 \cdot 10^{-16}$ (рис. 8). Т.е. она получилась на два порядка меньше минимальной относительной погрешности, полученной в программе FASTMEAN.

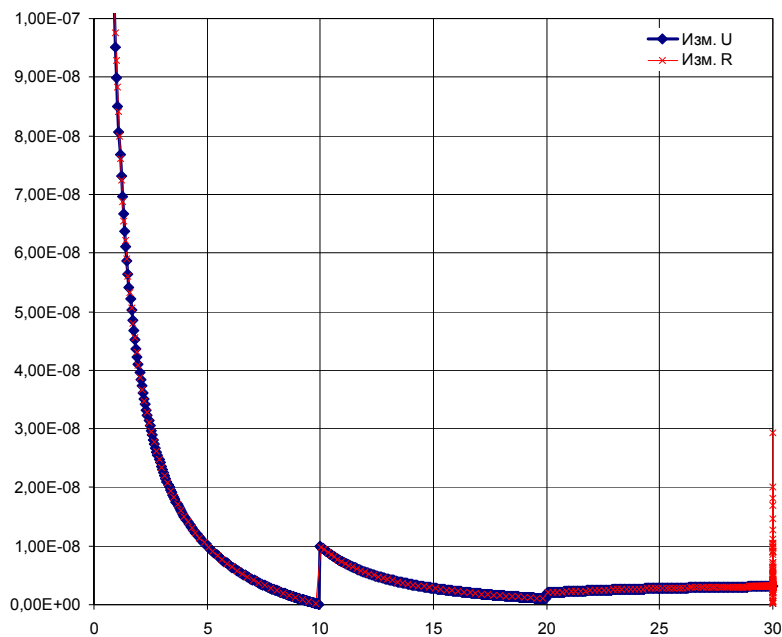


Рис. 7. Относительная погрешность расчета ВАХ нелинейного элемента в программе FASTMEAN

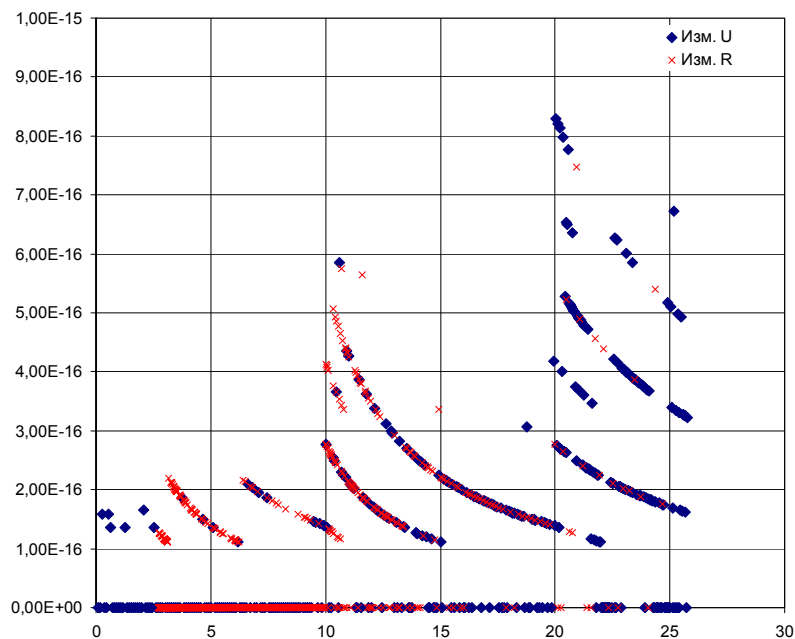


Рис. 8. Относительная погрешность расчета ВАХ нелинейного элемента в программе MathCAD

Кроме того, получившаяся относительная погрешность расчета не имеет четкой зависимости. Иными словами, точка расчета может иметь относительную погрешность порядка 10^{-16} , а следующая точка может иметь нулевую относительную погрешность расчета (рис. 8). Это больше похоже на погрешность представления вещественных чисел в программе, чем на погрешность расчета.

Выводы: 1. Установлено, что «классическая» схема замещения нелинейного элемента, состоящая из параллельных ветвей с идеальными диодами, имеет ВАХ, зависимую от подключаемых элементов. 2. Предложена схема замещения нелинейного элемента с ВАХ, независимой от внешней цепи. 3. На примере расчета ВАХ нелинейного элемента показано, что использование аналитического метода вместо численного расчета позволяет снизить относительную погрешность.

Список литературы

1. Чуа Л.О., Пен–Мин–Лин. Машинный анализ электронных схем / – Пер. с англ. – М.: Энергия, 1980. – 640 с.
2. Влах И., Сингхал К. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем / пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1988. – 560 с.
3. Смоллов В.Б. Диодные функциональные преобразователи.– Л.: Энергия, 1967. 136 с.
4. Сборник задач по ТОЭ: учеб. пособие.– 3-е изд., перераб. и доп./ Л.А. Бессонов, И.Г. Демидова, М.Е. Заруди и др.; под ред. Л.А. Бессонова.– М.: Высш. шк., 1988.– 543 с.
5. Manthe A., Li Z., Shi C.-J.R. Symbolic Analysis of Analog Circuits with Hard Nonlinearity // Proceedings of the Design Automation Conference (DAC'03). June 2–6. 2003. P. 542 – 545.
6. Шушпанов Д.В., Лучанский О.Д. Аналитический метод расчета резистивных цепей с идеальными диодами // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2017.– Вып. 14.– С. 64–81.– Bokhoven, van, W.M.G. Piecewise-linear modelling and analysis // Eindhoven: Technische Hogeschool Eindhoven. 1981.– 149 p.
7. Manthe A., Li Z., Shi C.-J.R., and Mayaram K. Symbolic Analysis of Nonlinear Analog Circuits // Proceedings of the Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition (DATE'03).– Mar. 2003. P. 11108–11109.
8. URL: <http://www.fastmean.ru>. Официальный сайт программы FASTMEAN.

Шушпанов Дмитрий Викторович – канд. техн. наук, доцент кафедры «Теория электрических цепей и связи» Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича.

E-mail: dimasf@inbox.ru.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ ИДЕАЛЬНЫХ ДИОДОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЯХ

Д. В. Шушпанов

Уточнена и формализована методика по нахождению параметров цепи, необходимых для составления системы уравнений, которая определяет токи и напряжения на идеальных диодах. Рассмотрен алгоритм решения такой системы нелинейных уравнений.

This article describes in more detail a technique for finding the circuit parameters necessary for the preparation of the system of equations, which defines the currents and voltages on ideal diodes. The algorithm for solving such a system of nonlinear equations is considered.

Об аналитическом методе расчета нелинейных резистивных цепей. Обсуждаемый метод предусматривает нахождение токов или напряжений на идеальных диодах и их замещение либо источниками напряжения, либо источниками тока. Если в выражениях токов (или напряжений) идеальных диодов будут присутствовать только токи источников тока и напряжения источников напряжения, то источники тока (или источники напряжения) можно считать независимыми, полученную резистивную схему – линейной схемой, что позволяет использовать аналитические методы, разработанные для линейных цепей.

Данная статья развивает работу [1], в которой предложен аналитический метод расчета резистивных цепей, содержащих любые нелинейные элементы (НЭ). В первой работе автора по данной тематике [2], опирающейся на зарубежные работы [3, 4], был рассмотрен аналитический расчет резистивных цепей с идеальными диодами, имеющими прямоугольную вольтамперную характеристику (ВАХ).

Нахождение токов (или напряжений) идеальных диодов. Для этого в [2–4] предлагается решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_D = \mathbf{R}_D \cdot \mathbf{I}_D + \mathbf{U}_D, \\ \mathbf{I}_D, \mathbf{U}_D \geq 0, \\ \mathbf{I}_D^T \cdot \mathbf{U}_D = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

где \mathbf{I}_D – токи, а \mathbf{U}_D – напряжения идеальных диодов.

Решением системы уравнений (1) будет функция, названная в [3, 4] передачей модуля (modulus transform):

$$y = \lfloor x \rfloor \rightarrow \begin{cases} y = x, & x \geq 0 \\ y = 0, & x < 0 \end{cases} \rightarrow y = \frac{x + |x|}{2}. \quad (2)$$

Это вытекает из результата Бокховена и Леенартса в форме «линейной проблема взаимозависимости» (linear complementarity problem – LCP [5]).

Для решения (1) необходимо определить элементы матриц \mathbf{R}_D и \mathbf{U}_D . В [4] или, более подробно, в [2] предлагается составить систему уравнений для всей цепи и с помощью преобразований перейти к системе (1). Однако при увеличении количества идеальных диодов значительно увеличивается сложность нахождения решения системы (1).

Для уменьшения объема вычислений в [4] предлагается использовать графы. В [2] было предложено использовать метод схемных определителей, что позволило сразу определить токи (или напряжения) идеальных диодов, не составляя никакой системы уравнений. Данная методика упрощает процесс нахождения токов через идеальные диоды, но в ней с увеличением количества идеальных диодов по-прежнему комбинаторно увеличивается количество необходимых схем замещения.

Решение системы (1) для токов и напряжений идеальных диодов.

В одномерном и двумерном случаях решения системы (1) будут иметь вид (3) и (4) [1–4]:

$$i_D(t) = \lfloor -u_D(t)/R_D \rfloor, \quad u_D(t) = \lfloor u_D(t) \rfloor; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u_{D1}(t) &= \left[R_{D12} \left[\frac{-u_{D2}(t)}{R_{D22}} \right] + u_{D1}(t) \right], & i_{D1}(t) &= \left[-\frac{R_{D12}}{R_{D11}} \left[\frac{-u_{D2}(t)}{R_{D22}} \right] - \frac{u_{D1}(t)}{R_{D11}} \right], \\ u_{D2}(t) &= \left[R_{D21} \left[\frac{-u_{D1}(t)}{R_{D11}} \right] + u_{D2}(t) \right], & i_{D2}(t) &= \left[-\frac{R_{D21}}{R_{D22}} \left[\frac{-u_{D1}(t)}{R_{D11}} \right] - \frac{u_{D2}(t)}{R_{D22}} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

В трехмерном случае получаем токи [1]:

$$i_{D1}(t) = \text{MT} \left(-\frac{R_{\mathcal{E}12}}{R_{\mathcal{E}11}} \left[-\frac{R_{\mathcal{E}23}}{R_{\mathcal{E}22}} \left[\frac{-u_{\mathcal{E}3}(t)}{R_{\mathcal{E}33}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}2}(t)}{R_{\mathcal{E}22}} \right] - \frac{R_{\mathcal{E}13}}{R_{\mathcal{E}11}} \left[-\frac{R_{\mathcal{E}32}}{R_{\mathcal{E}33}} \left[\frac{-u_{\mathcal{E}2}(t)}{R_{\mathcal{E}22}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}3}(t)}{R_{\mathcal{E}33}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}1}(t)}{R_{\mathcal{E}11}} \right), \quad (5)$$

$$i_{D2}(t) = \text{MT} \left(-\frac{R_{\mathcal{E}21}}{R_{\mathcal{E}22}} \left[-\frac{R_{\mathcal{E}13}}{R_{\mathcal{E}11}} \left[\frac{-u_{\mathcal{E}3}(t)}{R_{\mathcal{E}33}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}1}(t)}{R_{\mathcal{E}11}} \right] - \frac{R_{\mathcal{E}23}}{R_{\mathcal{E}22}} \left[-\frac{R_{\mathcal{E}31}}{R_{\mathcal{E}33}} \left[\frac{-u_{\mathcal{E}1}(t)}{R_{\mathcal{E}11}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}3}(t)}{R_{\mathcal{E}33}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}2}(t)}{R_{\mathcal{E}22}} \right), \quad (6)$$

$$i_{D3}(t) = \text{MT} \left(-\frac{R_{\mathcal{E}31}}{R_{\mathcal{E}33}} \left[-\frac{R_{\mathcal{E}12}}{R_{\mathcal{E}11}} \left[\frac{-u_{\mathcal{E}2}(t)}{R_{\mathcal{E}22}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}1}(t)}{R_{\mathcal{E}11}} \right] - \frac{R_{\mathcal{E}32}}{R_{\mathcal{E}33}} \left[-\frac{R_{\mathcal{E}21}}{R_{\mathcal{E}22}} \left[\frac{-u_{\mathcal{E}1}(t)}{R_{\mathcal{E}11}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}2}(t)}{R_{\mathcal{E}22}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}3}(t)}{R_{\mathcal{E}33}} \right), \quad (7)$$

где $\text{MT}(x)$ – альтернативная форма записи $\lfloor x \rfloor$.

Как видно из выражений (3) – (7), нахождение тока идеального диода подобно нахождению определителя матрицы:

– для одномерного случая: $i_D = \lfloor -i \rfloor$, где $i = u_{\mathcal{E}}/R_{\mathcal{E}}$;

$$\text{– для двумерного случая: } i_{D1} = \left\lfloor -\frac{R_{\mathcal{E}12}}{R_{\mathcal{E}11}} \hat{i}_2^1 - i_1 \right\rfloor, \quad i_{D2} = \left\lfloor -\frac{R_{\mathcal{E}21}}{R_{\mathcal{E}22}} \hat{i}_1^2 - i_2 \right\rfloor, \quad (8)$$

где $i_i = u_{\mathcal{E}i}/R_{\mathcal{E}i}$, \hat{i}_l^k – ток через l -ый диод, когда k -й диод закрыт для одномерного случая, т.е. $\hat{i}_l^k = \lfloor -i_l \rfloor$;

– для трехмерного случая:

$$i_{D1} = \left\lfloor -\frac{R_{\mathcal{E}12}}{R_{\mathcal{E}11}} \hat{i}_2^1 - \frac{R_{\mathcal{E}13}}{R_{\mathcal{E}11}} \hat{i}_3^1 - i_1 \right\rfloor, \quad i_{D2} = \left\lfloor -\frac{R_{\mathcal{E}21}}{R_{\mathcal{E}22}} \hat{i}_1^2 - \frac{R_{\mathcal{E}23}}{R_{\mathcal{E}22}} \hat{i}_3^2 - i_2 \right\rfloor, \\ i_{D3} = \left\lfloor -\frac{R_{\mathcal{E}31}}{R_{\mathcal{E}33}} \hat{i}_1^3 - \frac{R_{\mathcal{E}32}}{R_{\mathcal{E}33}} \hat{i}_2^3 - i_3 \right\rfloor, \quad (9)$$

где \hat{i}_l^k – ток через l -ый диод, когда k -ый диод закрыт для двумерного случая (8): $\hat{i}_2^1 = i_{D2}|_{1 \rightarrow 3}$, $\hat{i}_3^1 = i_{D1}|_{1 \rightarrow 3}$, $\hat{i}_1^2 = i_{D1}|_{2 \rightarrow 3}$, $\hat{i}_3^2 = i_{D2}|_{2 \rightarrow 3}$, $\hat{i}_1^3 = i_{D1}$, $\hat{i}_2^3 = i_{D2}$;

– для четырехмерного случая (получаем по аналогии с описанным выше трехмерным случаем):

$$i_{D1} = \left[-\frac{R_{\mathcal{E}12}}{R_{\mathcal{E}11}} \hat{i}_2^1 - \frac{R_{\mathcal{E}13}}{R_{\mathcal{E}11}} \hat{i}_3^1 - \frac{R_{\mathcal{E}14}}{R_{\mathcal{E}11}} \hat{i}_4^1 - i_1 \right], \quad i_{D2} = \left[-\frac{R_{\mathcal{E}21}}{R_{\mathcal{E}22}} \hat{i}_1^2 - \frac{R_{\mathcal{E}23}}{R_{\mathcal{E}22}} \hat{i}_3^2 - \frac{R_{\mathcal{E}24}}{R_{\mathcal{E}22}} \hat{i}_4^2 - i_2 \right],$$

$$i_{D3} = \left[-\frac{R_{\mathcal{E}31}}{R_{\mathcal{E}33}} \hat{i}_1^3 - \frac{R_{\mathcal{E}32}}{R_{\mathcal{E}33}} \hat{i}_2^3 - \frac{R_{\mathcal{E}34}}{R_{\mathcal{E}33}} \hat{i}_4^3 - i_3 \right], \quad i_{D4} = \left[-\frac{R_{\mathcal{E}41}}{R_{\mathcal{E}44}} \hat{i}_1^4 - \frac{R_{\mathcal{E}42}}{R_{\mathcal{E}44}} \hat{i}_2^4 - \frac{R_{\mathcal{E}43}}{R_{\mathcal{E}44}} \hat{i}_3^4 - i_4 \right], \quad (10)$$

где \hat{i}_l^k – ток через l -ый диод, когда k -ый диод закрыт для трехмерного

случая (9): $\hat{i}_2^1 = i_{D1}(t)|_{\substack{1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 4}}$, $\hat{i}_3^1 = i_{D2}(t)|_{\substack{1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 4}}$, $\hat{i}_4^1 = i_{D3}(t)|_{\substack{1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 4}}$, $\hat{i}_1^2 = i_{D1}(t)|_{\substack{2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 4}}$,

$$\hat{i}_3^2 = i_{D2}(t)|_{\substack{2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 4}}, \quad \hat{i}_4^2 = i_{D3}(t)|_{\substack{2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 4}}, \quad \hat{i}_1^3 = i_{D1}(t)|_{3 \rightarrow 4}, \quad \hat{i}_2^3 = i_{D2}(t)|_{3 \rightarrow 4}, \quad \hat{i}_4^3 = i_{D3}(t)|_{3 \rightarrow 4},$$

$$\hat{i}_1^4 = i_{D1}(t), \quad \hat{i}_2^4 = i_{D2}(t), \quad \hat{i}_3^4 = i_{D3}(t).$$

Такова методика итеративного решения системы (1) посредством учета решений этой системы меньшего порядка, предложенная в [1]. Из выражений (8)–(10) следует, что решение системы (1), то есть ток на идеальном диоде, можно представить в виде:

$$s_y(t) = \sum^n \left(K_{yz} \left[\left(\dots \left[\sum^3 \left(K_{mn} \left[\sum^2 \left(K_{kl} \left[K_{ij} \left[x_j(t) \right] + x_i(t) \right] \right) + x_m(t) \right] \right) + x_p(t) \right] \right] \dots + x_v(t) \right] \right) + x_y(t), \quad (11)$$

где $s_y(t)$ – ток на идеальном диоде y ; K – коэффициенты, определяемые матрицей $\mathbf{R}_{\mathcal{E}}$; $x(t)$ – ток, определяемый матрицами $\mathbf{R}_{\mathcal{E}}$ и $\mathbf{U}_{\mathcal{E}}$.

На основании (3)–(10) и (11) необходимые для нахождения тока через i -й идеальный диод $x_i(t)$ и K_{ij} получаются:

$$x_i(t) = -u_{\mathcal{E}i}(t)/R_{\mathcal{E}i}, \quad K_{ij} = -R_{\mathcal{E}ij}/R_{\mathcal{E}ii}. \quad (12)$$

Как видно, для нахождения тока через i -й идеальный диод необходимо правильно выбрать коэффициенты i, j для R_{ij} в K_{ij} . В силу (8)–(10) определение этих коэффициентов позволяет сразу записать решение системы (1) для цепи с любым количеством идеальных диодов.

Решение системы 4-го порядка для тока i_{D1} . Сначала запишем решение в виде суммы 4-х слагаемых:

$$i_{D1} = \left[-\frac{R_{\mathcal{E}12}}{R_{\mathcal{E}11}} \hat{i}_2 - \frac{R_{\mathcal{E}13}}{R_{\mathcal{E}11}} \hat{i}_3 - \frac{R_{\mathcal{E}14}}{R_{\mathcal{E}11}} \hat{i}_4 - i_1 \right]. \quad (13)$$

Первые 3 слагаемых имеют множители в виде элементов матрицы $\mathbf{R}_{\mathcal{E}}$, коэффициенты которых соотносятся как с индексом искомого тока (помечено прямоугольником), так и с индексами других токов (непомечено). Четвертое слагаемое равно

$$i_1 = \left[u_{\mathcal{E}1}(t) / R_{\mathcal{E}11} \right].$$

Теперь распишем первое слагаемое в выражении (13). Оно представляет сумму из 3-х слагаемых:

$$\hat{i}_2 = \left[-\frac{R_{23}}{R_{\mathcal{E}22}} \hat{i}_3 - \frac{R_{\mathcal{E}24}}{R_{\mathcal{E}22}} \hat{i}_4 - i_2 \right]. \quad (14)$$

Первые 2 слагаемых имеют множители в виде элементов матрицы $\mathbf{R}_{\mathcal{E}}$, коэффициенты которых соотносятся как с индексом второго тока (помечено прямоугольником), который является индексом первого слагаемого уравнения (13), так и с индексами других токов за исключением первого тока (непомечено). Третье слагаемое равно

$$i_2 = \left[u_{\mathcal{E}2}(t) / R_{\mathcal{E}22} \right].$$

Аналогично формируются остальные слагаемые уравнения (13).

Распишем первое слагаемое в выражении (14):

$$\hat{i}_3 = \left[-\frac{R_{\mathcal{E}34}}{R_{\mathcal{E}33}} \hat{i}_4 - i_3 \right]. \quad (15)$$

Сомножитель первого слагаемого имеет коэффициенты, соотносимые как с индексом третьего тока (помечено прямоугольником), который является индексом первого слагаемого уравнения (14), так и с индексами других токов за исключением первого и второго токов. Второе слагаемое равно

$$i_3 = \left[u_{\mathcal{E}3}(t) / R_{\mathcal{E}33} \right].$$

Аналогично формируются остальные слагаемые уравнения (14), а также слагаемые второго порядка, содержащиеся в слагаемых уравнения (13).

В заключение формируются слагаемые первого порядка. Для уравнения (15) такое слагаемое будет равно

$$\hat{i}_{\square 4}^3 = \left[-i_{\square 4} \right] = \left[-u_{\square 4}(t) / R_{\square 4 \square 4} \right]. \quad (16)$$

По аналогии можно записать решение системы (1) любого порядка. Такой подход к решению (1) позволяет отсекать несуществующие варианты, обусловленные разреженностью матрицы \mathbf{R}_{\square} [1]. Это позволяет для произвольной резистивной цепи с любым количеством идеальных диодов найти токи через эти диоды по элементам матриц \mathbf{R}_{\square} и \mathbf{U}_{\square} .

Определение элементов матриц \mathbf{R}_{\square} и \mathbf{U}_{\square} для резистивных цепей с нелинейными элементами [1]. В данной статье рассматривается НЭ с кусочно-линейной вольтамперной характеристикой (рис. 1а). НЭ (рис. 1б) отображается схемой замещения, использующей идеальные диоды (рис. 1в) с прямоугольной ВАХ (рис. 1г).

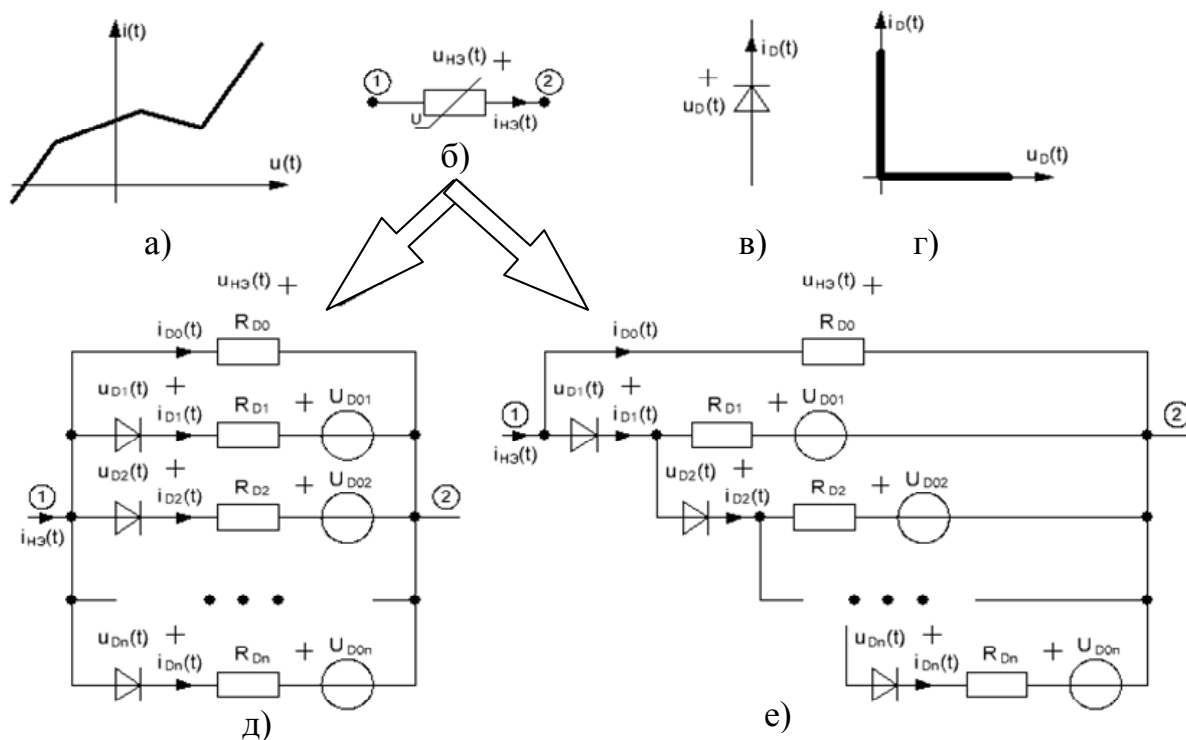


Рис. 1. Кусочно-линейная аппроксимация ВАХ (а) нелинейного элемента (б), идеальный диод (в) со своей ВАХ (г) и схемы замещения (д, е) нелинейного элемента, использующие идеальные диоды

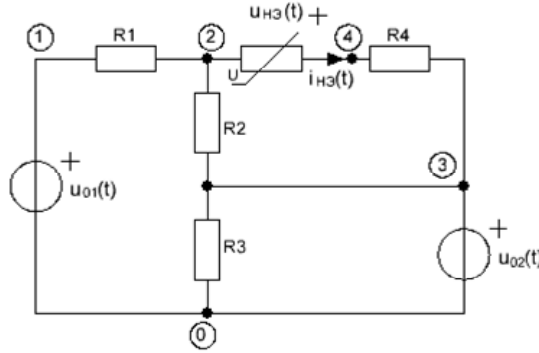


Рис. 2. Пример разветвленной цепи с одним нелинейным элементом

В [4, 5] была предложена классическая схема замещения НЭ (рис. 1д). Как было показано в [6] данная схема замещения нелинейного элемента имеет существенный недостаток – зависимость ВАХ схемы замещения НЭ от внешних элементов. В [6] была предложена иная схема замещения НЭ (рис. 1е), в которой нет этого недостатка, т.е. ВАХ нелинейного элемента не зависит от внешних элементов (рис. 1е).

Случай с одним нелинейным элементом (рис. 2). Для этой схемы заменим нелинейный элемент на источник тока $i_{НЭ}(t)$ и для полученной схемы составим уравнения по методу узловых напряжений:

$$\begin{cases} u_1(t) = u_{01}(t) \\ -\frac{1}{R_1}u_1(t) + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)u_2(t) - \frac{1}{R_2}u_3(t) = -i_{НЭ}(t) \\ u_3(t) = u_{02}(t) \\ -\frac{1}{R_4}u_3(t) + \frac{1}{R_4}u_4(t) = i_{НЭ}(t) \end{cases} \quad (17)$$

Далее составляем уравнения по ЗНК для схемы замещения НЭ (рис. 1е):

$$\begin{cases} i_{НЭ}(t) = i_{D0}(t) + i_{D1}(t), \quad u_{НЭ}(t) = u_4(t) - u_2(t), \\ \begin{cases} -u_2(t) + i_{D0}(t)R_{D0} + u_4(t) = 0 \\ -u_2(t) - u_{D1}(t) + (i_{D1}(t) - i_{D2}(t))R_{D1} + U_{D01} + u_4(t) = 0 \\ -u_{D2}(t) + (i_{D2}(t) - i_{D3}(t))R_{D2} + U_{D02} - U_{D01} - (i_{D1}(t) - i_{D2}(t))R_{D1} = 0 \\ -u_{D3}(t) + (i_{D3}(t) - i_{D4}(t))R_{D3} + U_{D03} - U_{D02} - (i_{D2}(t) - i_{D3}(t))R_{D2} = 0 \\ \dots \\ -u_{Dn}(t) + i_{Dn}(t)R_{Dn} + U_{D0n} - U_{D0n-1} - (i_{Dn-1}(t) - i_{Dn}(t))R_{Dn-1} = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (18)$$

В [1] была допущена ошибка в составлении системы уравнений (18), поэтому далее в статье приводится тот же ход решения с исправленной системой уравнения.

Объединив (17) и (18), получаем систему уравнений для данной цепи (рис. 2) в следующем виде [2]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{A}_1 \\ -\mathbf{A}_2^T & \mathbf{R}_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_y \\ \mathbf{I}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_D - \mathbf{U}_{D0} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\text{где } \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/R_1 & 1/R_1 + 1/R_2 & -1/R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/R_4 & 1/R_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} u_{01}(t) \\ 0 \\ u_{02}(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_y = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_D = \begin{pmatrix} i_{D0}(t) \\ i_{D1}(t) \\ \vdots \\ i_{Dn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ u_{D1}(t) \\ \vdots \\ u_{Dn}(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U}_{D0} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_{D01} \\ U_{D02} - U_{D01} \\ \vdots \\ U_{D0n} - U_{D0n-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_D = \begin{pmatrix} R_{D0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{D1} & -R_{D1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_{D1} & R_{D1} + R_{D2} & -R_{D2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_{Dn-2} & R_{Dn-1} + R_{Dn} & -R_{Dn-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_{Dn-1} & R_{Dn-1} + R_{Dn} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Перепишем систему (20) относительно матриц \mathbf{I}_{D^*} и \mathbf{U}_{D^*} :

$$\mathbf{U}_{D^*} = \mathbf{R}_{D^*} \cdot \mathbf{I}_{D^*} + \mathbf{U}_{D^*}. \quad (21)$$

Для этого необходимо сделать следующие преобразования [2, 4].

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{D^*} = \mathbf{A}_2^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A}_1 + \mathbf{R}_D \\ \mathbf{U}_{D^*} = -\mathbf{A}_2^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_{D0} \end{cases}. \quad (22)$$

Подставляя (20) в (22), получаем

$$\mathbf{R}_{\mathcal{E}^*} = \left(\begin{array}{cc|ccc} R_{D0} + R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}} & R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}} & R_{D1} + R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}} & -R_{D1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -R_{D1} & R_{D1} + R_{D2} & -R_{D2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & -R_{Dn-2} & R_{Dn-1} + R_{Dn} & -R_{Dn-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_{Dn-1} & R_{Dn-1} + R_{Dn} \end{array} \right),$$

$$\mathbf{U}_{\mathcal{E}^*} = (u_{\mathcal{E}H\mathcal{E}}(t) \quad U_{D01} + u_{\mathcal{E}H\mathcal{E}}(t) \quad | \quad U_{D02} - U_{D01} \quad \cdots \quad U_{D0n} - U_{D0n-1})^T, \quad (23)$$

где $R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}} = R_4 + R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ – эквивалентное сопротивление для нелинейного элемента (рис. 2), $u_{\mathcal{E}H\mathcal{E}}(t) = (u_{02}(t) - u_{01}(t)) R_2 / (R_1 + R_2)$ – эквивалентное напряжение на НЭ (рис. 2), которые соответствуют $R_{\mathcal{E}}$ и $U_{\mathcal{E}}$ в случае использования в данной цепи идеального диода [2].

Система (21) отличается от (1), т.к. в матрицы \mathbf{I}_{D^*} и \mathbf{U}_{D^*} системы (21) входят как токи и напряжения через идеальные диоды (\mathbf{I}_D и \mathbf{U}_D), так и через резистор схемы замещения нелинейного элемента (рис. 1e), т.е. $\mathbf{I}_{D^*} = (i_{D0}(t) \quad \mathbf{I}_D)$, $\mathbf{U}_{D^*} = (0 \quad \mathbf{U}_D)$. Для нахождения \mathbf{I}_D и \mathbf{U}_D согласно (23) из системы (21) выразим $i_{D0}(t)$

$$i_{D0}(t) = \frac{u_{\mathcal{E}H\mathcal{E}}(t) - i_{D1}(t) R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}}}{R_{D0} + R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}}}$$

и получим систему (1) со следующими матрицами $\mathbf{R}_{\mathcal{E}}$ и $\mathbf{U}_{\mathcal{E}}$ для данной схемы (рис. 2)

$$\mathbf{R}_{\mathcal{E}} = \left(\begin{array}{cc|ccc} R_{D1} + R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}}^0 & & -R_{D1} & 0 & 0 & 0 \\ -R_{D1} & & -R_{D2} + R_{D2} & -R_{D2} & 0 & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & -R_{Dn-2} & R_{Dn-1} + R_{Dn} & -R_{Dn-1} \\ 0 & & 0 & 0 & -R_{Dn-1} & R_{Dn} \end{array} \right),$$

$$\mathbf{U}_{\mathcal{E}} = (U_{D01} + u_{\mathcal{E}H\mathcal{E}}^0(t) \quad | \quad U_{D02} - U_{D01} \quad \cdots \quad U_{D0n} - U_{D0n-1})^T,$$

где $R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}}^0 = \frac{R_{D0} R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}}}{R_{D0} + R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}}}$, $u_{\mathcal{E}H\mathcal{E}}^0(t) = u_{\mathcal{E}H\mathcal{E}}(t) \frac{R_{D0}}{R_{D0} + R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}}}$. (24)

Как видно из (24), в цепи с одним НЭ можно сразу формировать матрицы $\mathbf{R}_{\mathcal{E}}$ и $\mathbf{U}_{\mathcal{E}}$, минуя этапы формирования системы (19) и решения

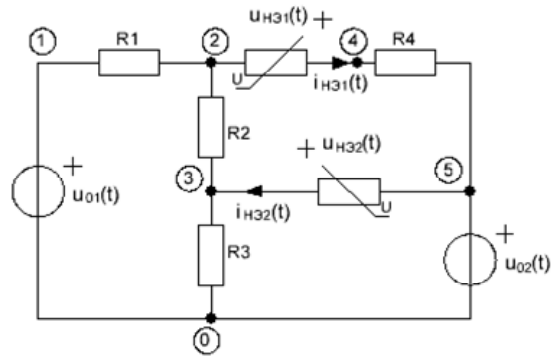


Рис. 3. Пример разветвленной цепи с двумя нелинейными элементами

системы (22). Для нахождения $R_{ЭНЭ}$, $R_{ЭНЭ}^0$, $u_{ЭНЭ}(t)$ и $u_{ЭНЭ}^0(t)$ можно воспользоваться методом схемных определителей [7,8], что также позволяет сократить время расчета.

Случай с двумя нелинейными элементами (рис. 3).

Рассматривается по аналогии со схемой с одним НЭ (рис. 2). Заменяв нелинейные элементы на источники тока $i_{НЭ1}(t)$ и $i_{НЭ2}(t)$, составим уравнения по методу узловых напряжений:

$$\begin{cases} u_1(t) = u_{01}(t) \\ -u_1(t)/R_1 + (1/R_1 + 1/R_2)u_2(t) - u_3(t)/R_2 = -i_{НЭ1}(t) \\ -u_2(t)/R_2 + (1/R_2 + 1/R_3)u_3(t) = i_{НЭ2}(t) \\ -u_5(t)/R_4 + u_4(t)/R_4 = i_{НЭ1}(t) \\ u_5(t) = u_{02}(t) \end{cases} \quad (25)$$

Далее составляем уравнения по ЗНК для каждого НЭ (рис. 1е) в цепи (рис. 3) и объединяем их с (25). Получаем следующие матрицы системы (15) для данной схемы (рис. 3):

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/R_1 & 1/R_1 + 1/R_2 & -1/R_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/R_2 & 1/R_2 + 1/R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_4 & -1/R_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_y = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 &= \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right), \quad \mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} u_{01}(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{02}(t) \end{pmatrix}, \\
\mathbf{A}_2 &= \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right), \quad \mathbf{R}_D = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_{D1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{R}_{D2} \end{array} \right), \\
\mathbf{R}_{Di} &= \left(\begin{array}{cccccc} R_{Di0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{Di1} & -R_{Di1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_{Di1} & R_{Di1} + R_{Di2} & -R_{Di2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_{Din-2} & R_{Din-1} + R_{Din} & -R_{Din-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_{Din-1} & R_{Din-1} + R_{Din} \end{array} \right), \\
\mathbf{U}_{D0} &= \begin{pmatrix} 0 \\ U_{D101} \\ U_{D102} - U_{D101} \\ \vdots \\ U_{D10n} - U_{D10n-1} \\ 0 \\ U_{D201} \\ U_{D202} - U_{D201} \\ \vdots \\ U_{D20m} - U_{D20m-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_D = \begin{pmatrix} i_{D10}(t) \\ i_{D11}(t) \\ i_{D12}(t) \\ \vdots \\ i_{D1n}(t) \\ i_{D20}(t) \\ i_{D21}(t) \\ i_{D22}(t) \\ \vdots \\ i_{D2m}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_{D0} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_{D11}(t) \\ u_{D12}(t) \\ \vdots \\ u_{D1n}(t) \\ 0 \\ u_{D21}(t) \\ u_{D22}(t) \\ \vdots \\ u_{D2m}(t) \end{pmatrix}. \quad (26)
\end{aligned}$$

Подставляя (26) в (22), находим матрицы $\mathbf{R}_{\mathcal{E}^*}$ и $\mathbf{U}_{\mathcal{E}^*}$:

$$\mathbf{R}_{\mathcal{E}^*} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_{D1} + \mathbf{R}_{\mathcal{E}H\mathcal{E}1} & \mathbf{R}_{\mathcal{E}H\mathcal{E}12} \\ \hline \mathbf{R}_{\mathcal{E}H\mathcal{E}12} & \mathbf{R}_{D1} + \mathbf{R}_{\mathcal{E}H\mathcal{E}2} \end{array} \right),$$

$$\mathbf{U}_{\mathfrak{A}^*} = \begin{pmatrix} u_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}1}(t) \\ U_{D101} + u_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}1}(t) \\ U_{D102} - U_{D101} \\ \vdots \\ \frac{U_{D10n} - U_{D10n-1}}{u_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}2}(t)} \\ U_{D201} + u_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}2}(t) \\ U_{D202} - U_{D201} \\ \vdots \\ U_{D20m} - U_{D10m-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}i} = \begin{pmatrix} R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}i} & R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}i} & \vdots & 0 \\ R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}i} & R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}i} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где $R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}1} = R_4 + \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$, $R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}2} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$, $R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}12} = -\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$,

$$u_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}1}(t) = u_{02}(t) - u_{01}(t) \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad u_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}2}(t) = u_{01}(t) \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - u_{02}(t) -$$

эквивалентные сопротивления и напряжения для НЭ, которые соответствуют элементам матриц $\mathbf{R}_{\mathfrak{A}}$ и $\mathbf{U}_{\mathfrak{A}}$ в случае использования в данной цепи идеальных диодов вместо нелинейных элементов [2], т.е.

$$\mathbf{R}_{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}1} & R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}12} \\ R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}12} & R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} u_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}1}(t) \\ u_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}2}(t) \end{pmatrix}.$$

Для нахождения токов через идеальные диоды избавимся от токов через резисторы, т.е. выразим $i_{D10}(t)$ и $i_{D20}(t)$ [1]:

$$\begin{cases} i_{D10}(t) = i_{01}(t) - K_{11}i_{D11}(t) - K_{12}i_{D21}(t) \\ i_{D20}(t) = i_{02}(t) - K_{21}i_{D11}(t) - K_{22}i_{D21}(t) \end{cases} \quad (28)$$

где $i_{01}(t) = \frac{u_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}1}(t)(R_{D20} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}2}) - u_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}2}(t)R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}12}}{(R_{D10} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}1})(R_{D20} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}2}) - R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}12}^2}$, $K_{11} = \frac{R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}1}(R_{D20} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}2}) - R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}12}^2}{(R_{D10} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}1})(R_{D20} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}2}) - R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}12}^2}$,

$$i_{02}(t) = \frac{u_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}2}(t)(R_{D10} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}1}) - u_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}1}(t)R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}12}}{(R_{D10} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}1})(R_{D20} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}2}) - R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}12}^2}, \quad K_{12} = \frac{R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}12}R_{D20}}{(R_{D10} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}1})(R_{D20} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}2}) - R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}12}^2},$$

$$K_{21} = \frac{R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}12}R_{D10}}{(R_{D10} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}1})(R_{D20} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}2}) - R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}12}^2}, \quad K_{22} = \frac{R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}2}(R_{D10} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}1}) - R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}12}^2}{(R_{D10} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}1})(R_{D20} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}2}) - R_{\mathfrak{A}\mathfrak{E}12}^2}. \quad (29)$$

Тогда матрицы $\mathbf{R}_{\mathfrak{A}}$ и $\mathbf{U}_{\mathfrak{A}}$ для схемы (рис. 3) в системе уравнений (1) будут равны:

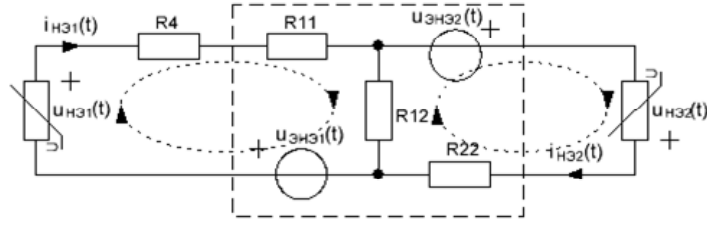


Рис. 4. Преобразованная цепь (исходная – рис. 3)

$$\mathbf{U}_{\mathcal{E}} = \left(U_{D101} + u_{\mathcal{E}H1}^0(t) \quad U_{D102} - U_{D101} \quad \cdots \quad U_{D10n} - U_{D10n-1} \quad \Big| \quad U_{D201} + u_{\mathcal{E}H2}^0(t) \quad U_{D202} - U_{D201} \quad \cdots \quad U_{D20m} - U_{D20m-1} \right)^T,$$

$$\mathbf{R}_{\mathcal{E}} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_{D1}^0 + \mathbf{R}_{\mathcal{E}H1}^0 & \mathbf{R}_{\mathcal{E}H12}^0 \\ \hline \mathbf{R}_{\mathcal{E}H12}^0 & \mathbf{R}_{D2}^0 + \mathbf{R}_{\mathcal{E}H2}^0 \end{array} \right), \quad \mathbf{R}_{\mathcal{E}H\mathcal{E}i}^0 = \left(\begin{array}{c|c} R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}i} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right),$$

$$\mathbf{R}_{Di}^0 = \begin{pmatrix} R_{Di1} & -R_{Di1} & 0 & \cdots & 0 \\ -R_{Di1} & R_{Di1} + R_{Di2} & -R_{Di2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -R_{Din-2} & R_{Din-1} + R_{Din} & -R_{Din-1} \\ 0 & 0 & 0 & -R_{Din-1} & R_{Din-1} + R_{Din} \end{pmatrix},$$

где $R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}1}^0 = (1 - K_{11})R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}1} - K_{21}R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}12}$, $R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}2}^0 = -K_{12}R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}12} + (1 - K_{22})R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}2}$,

$R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}12}^0 = -K_{12}R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}1} + (1 - K_{22})R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}12}$, $R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}21}^0 = (1 - K_{11})R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}12} - K_{21}R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}2}$,

$u_{\mathcal{E}H1}^0(t) = u_{\mathcal{E}H1}(t) - R_{\mathcal{E}H1}i_{01}(t) - R_{\mathcal{E}H12}i_{02}(t)$, $u_{\mathcal{E}H2}^0(t) = u_{\mathcal{E}H2}(t) - R_{\mathcal{E}H12}i_{01}(t) - R_{\mathcal{E}H2}i_{02}(t)$.

Как видно, нет необходимости составлять «проблемную» систему (19) и использовать преобразования (22) для получения системы (21) и в дальнейшем – систему (1), чтобы найти напряжения и токи через нелинейные элементы (идеальные диоды). Достаточно лишь найти элементы матриц $\mathbf{R}_{\mathcal{E}^*}$ и $\mathbf{U}_{\mathcal{E}^*}$.

Для этого согласно (21) необходимо схему (рис. 3) преобразовать в схему на рис. 4 (пунктиром выделена преобразуемая часть схемы на рис. 3), т.е. использовать метод контурных токов: $R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}1} = R4 + R11 + R12$, $R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}2} = R22 + R12$ – эквивалентные сопротивления каждого НЭ; $R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}12} = \pm R12$ – сопротивление, через которое протекают токи обоих НЭ (в зависимости от взаимного направления токов НЭ может быть как

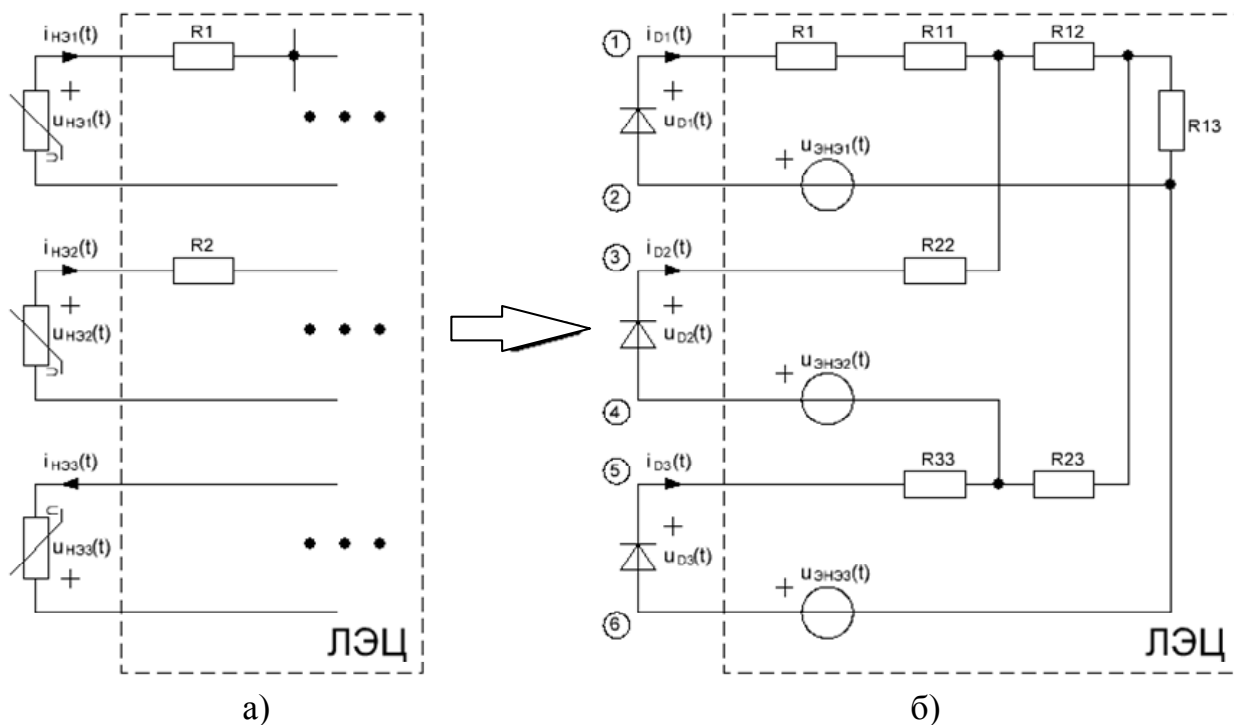


Рис. 5. Преобразование нелинейной резистивной цепи, содержащей 3 НЭ

положительным, так и отрицательным); $u_{\text{ЭНЭ}1}(t)$, $u_{\text{ЭНЭ}2}(t)$ – эквивалентные напряжения на НЭ. Используя эти параметры, а также параметры схем замещения НЭ, составляются матрицы $\mathbf{R}_{\text{Э}^*}$ и $\mathbf{U}_{\text{Э}^*}$.

Обобщение методики на большее число нелинейных элементов. Сначала все НЭ (например, на рис. 5а) заменяются идеальными диодами. Методом контурных токов определяются собственные сопротивления контуров и сумма напряжений каждого контура (рис. 5б). Методом эквивалентного генератора находятся элементы матрицы $\mathbf{U}_{\text{Э}^*}$ (после замены всех оставшихся идеальных диодов разрывом).

Диагональные элементы матрицы $\mathbf{R}_{\text{Э}^*}$ находятся так:

$$\begin{cases} R_{\text{ЭНЭ}1} = R1 + R11 + R12 + R13 \\ R_{\text{ЭНЭ}2} = R22 + R12 + R23 \\ R_{\text{ЭНЭ}3} = R33 + R13 + R23 \end{cases}, \quad (30)$$

Уравнения для оставшихся элементов матрицы $\mathbf{R}_{\text{Э}^*}$ имеют вид:

$$\begin{cases} R_{\text{ЭНЭ}12} = R_{\text{ЭНЭ}21} = R12 \\ R_{\text{ЭНЭ}23} = R_{\text{ЭНЭ}32} = R23 \\ R_{\text{ЭНЭ}13} = R_{\text{ЭНЭ}31} = -R13 \end{cases}, \quad (31)$$

Обратим внимание на то, что для определения недиагональных элементов матрицы $\mathbf{R}_{Э*}$, то есть определения решений системы (31), в системе (30) не хватает уравнений. Для увеличения количества уравнений в (30) надо провести расчет сопротивлений в других точках.

Определим сопротивление между узлами 1 и 3 (между «плюсами» идеальных диодов) – R_{1-3} , а также между узлами 2 и 4 (между «минусами» идеальных диодов) – R_{2-4} . Аналогично определяем сопротивления для других пар идеальных диодов. Далее к (30) добавляется система:

$$\begin{cases} R_{ЭНЭ1} + R_{ЭНЭ2} - R_{1-3} - R_{2-4} = 2 \cdot R12 \\ R_{ЭНЭ1} + R_{ЭНЭ3} - R_{1-5} - R_{2-6} = 2 \cdot R13 \\ R_{ЭНЭ2} + R_{ЭНЭ3} - R_{3-5} - R_{4-6} = 0 \end{cases} \quad (32)$$

Третье уравнение в (32) получилось равное нулю. Поэтому определим сопротивление между «плюсом» одного идеального диода и «минусом» другого идеального диода. Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} R_{1-4} + R_{2-3} - R_{ЭНЭ1} - R_{ЭНЭ2} &= \\ &= R_{1-6} + R_{2-5} - R_{ЭНЭ1} - R_{ЭНЭ3} = \\ &= R_{ЭНЭ2} + R_{ЭНЭ3} - R_{3-6} - R_{4-5} = R23. \end{aligned} \quad (33)$$

По (32) и (33) находятся недиагональные элементы матрицы $\mathbf{R}_{Э*}$.

После определения элементов матриц $\mathbf{R}_{Э*}$ $\mathbf{U}_{Э*}$ для идеальных диодов переходим к матрицам $\mathbf{R}_{Э*}$ и $\mathbf{U}_{Э*}$ для нелинейных элементов (по аналогии с (27)). Затем определяются коэффициенты для перехода от матриц $\mathbf{R}_{Э*}$ и $\mathbf{U}_{Э*}$ к матрицам $\mathbf{R}_{Э}$ и $\mathbf{U}_{Э}$. Предложенная методика ограничена схемами, в которых параллельно НЭ не подключен какой-либо компонент, и которые не содержат источников, управляемых током или напряжением НЭ.

Выводы: 1. Представлена подробная и исправленная методика нахождения матриц для системы уравнений, определяющей токи и напряжения идеальных диодов. Меньшее, чем в [4], количество требуемых преобразований позволяет ускорить расчет схемы. 2. Показано, что резистивные схемы, к которым применима предложенная методика, не могут содержать элементов, параллельных нелинейным элементам, и источников, управляемых током или напряжением нелинейного элемента.

3. Указано на возможность прямого (не итеративного) решения системы уравнений для определения токов и напряжений на идеальных диодах.

Список литературы

1. Шушпанов Д.В., Улитина А.С. Аналитический метод расчета резистивных цепей с нелинейными резистивными элементами // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2017.– Вып. 14.– С. 88–101.

2. Шушпанов Д.В., Лучанский О.Д. Аналитический метод расчета резистивных цепей с идеальными диодами // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2017.– Вып. 14.– С. 68–87.

3. Manthe A., Li Z., Shi C.-J.R., and Mayaram K. Symbolic Analysis of Nonlinear Analog Circuits // Proceedings of the Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition (DATE'03). Mar. 2003. P. 11108–11109.

4. Manthe A., Li Z., Shi C.-J.R. Symbolic Analysis of Analog Circuits with Hard Nonlinearity // Proceedings of the Design Automation Conference (DAC'03). June 2-6. 2003. P. 542–545.

5. Leenaerts D.M.W., van Bokhoven W.M.G. Piecewise Linear Modeling and Analysis / Kluwer Academic Publishers, 1998.

6. Шушпанов Д.В. Схема замещения нелинейного двухполюсника без зависимости вольтамперной характеристики от внешней цепи // В настоящем выпуске.

7. Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ и диакоптика электрических цепей методом схемных определителей: Учебное пособие.– Ульяновск: УлГТУ, 2003. – 228 с.

8. Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ линейных аналоговых и дискретно-аналоговых электрических цепей: Учебное пособие.– Ульяновск: УлГТУ, 2008. – 284 с.

Шушпанов Дмитрий Викторович – канд. техн. наук, доцент кафедры «Теория электрических цепей и связи» Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича.
E-mail: dimasf@inbox.ru.

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ КАСКАДНЫХ СХЕМ ДЕЛЕНИЕМ ИХ НА ЧАСТИ

С. А. Курганов, М. В. Недорезов, В. В. Филаретов

Предложены формулы относительной чувствительности, в которых миноры соответствуют объединению подсхем и раскрываются методом двоичных векторов. Показано, что каскады типовых структур электронных цепей, разделяемые выходами операционных усилителей, приводят к образованию сокращающих множителей в минорной формуле. Разработана методика, устраняющая избыточные множители и повторный анализ одинаковых схемных миноров, что позволяет многократно упростить расчет чувствительности.

The formulas of relative sensitivity in which the minors correspond to the Union of subcircuits and are found by the method of binary vectors are proposed. It is shown that cascades of typical structures of electronic circuits, separated by the outputs of operational amplifiers, lead to the formation of reducing factors in the minor formula. A technique is developed that deletes of cancelled multipliers and re-analysis of minors that allows to simplify the calculation of sensitivity.

О формулах для нахождения символьных функций относительной чувствительности. Относительная чувствительность схемной функции F по параметру W определяется выражением [1]–[8]:

$$S_W^F = \frac{dF}{F} \frac{W}{dW}, \quad (1)$$

которое реализуется на основе расширенного узлового базиса [3, 6] или графовых методов [4, 5]. Дифференцирование функции F приводит к *разностным формулам*, содержащим разности символьных выражений с многочисленными избыточными парами одинаковых слагаемых с

противоположными знаками. При этом частные производные F по узловым проводимостям увеличивают число избыточных слагаемых.

Можно уменьшить число избыточных слагаемых в разностных формулах (но не исключить их), если схемную функцию представить в виде отношения определителей числителя N и знаменателя D , а варьируемый параметр выделить в них в явном виде. В этом случае чувствительность можно представить следующими формулами [2]:

$$S_W^F = W \frac{N_1 D - N D_1}{ND}; S_W^F = \frac{N D_2 - N_2 D}{ND}. \quad (2),(3)$$

В (2) и (3) N_1, N_2 и D_1, D_2 – составные части числителя и знаменателя схемной функции, которые находятся путем выделения варьируемого параметра по формулам

$$N = WN_1 + N_2; D = WD_1 + D_2. \quad (4)$$

Не содержат избыточных слагаемых в отличие от разностных выражений (2), (3) формула чувствительности *Бодэ* [1] для Y -схем с заземленными варьируемыми элементами и ее обобщение для произвольных линейных электрических цепей на основе многократных суммарных алгебраических дополнений (МСАД) [7]. Эти формулы требуют раскрытия четырех определителей – МСАД. Так, формула для относительной чувствительности коэффициента K передачи напряжения схемы на рис. 1,а по параметру Y незаземленного источника тока, управляемого напряжением (ИТУН), имеет вид [7]

$$S_Y^K = -Y \frac{\Delta_{(1+2)(5+6)} \Delta_{(1+2)(1+2),(7+8)(3+4)}}{\Delta_{(1+2)(1+2)} \Delta_{(1+2)(3+4)}}, \quad (5)$$

где Δ – определитель исходной схемы; Δ с индексами – МСАД; МСАД $\Delta_{(1+2)(3+4)}$ и $\Delta_{(1+2)(1+2)}$ – числитель N и знаменатель D коэффициента K .

При выводе формулы (5) используется МСАД-формула выделения параметра ИТУН [7]

$$\Delta = Y \Delta_{(7+8)(5+6)} + \Delta^{Y=0}, \quad (6)$$

в которой второе слагаемое находится при $Y=0$.

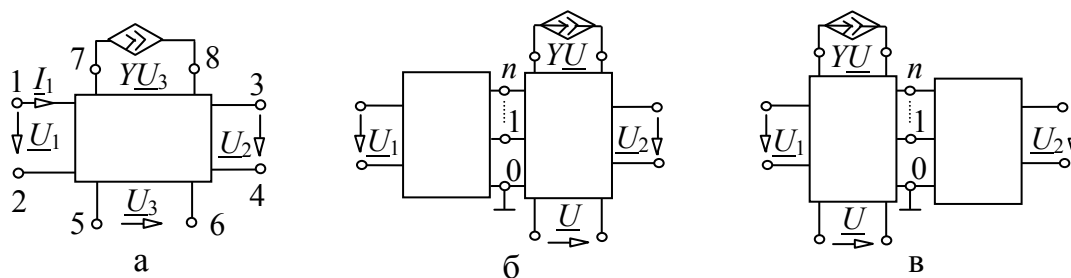


Рис. 1. Схемы для нахождения чувствительности по параметру ИТУН: исходная (а); разделенные на две подсхемы (б) и (в)

Раскрытие МСАД в (5) выполняется по методу схемных определителей (МСО), который в отличие от матричных методов не генерирует избыточных выражений – одинаковых слагаемых с противоположными знаками [7]. Переход от МСАД к схемному определителю осуществляется путем подключения к исходной схеме норатора и нулятора между полюсами, соответствующими первой и второй паре индексов из МСАД. Для сокращения числа операций и получения компактных выражений чувствительности используются формулы бисекции [9].

При использовании формулы бисекции для схемных определителей (МСАД) в формуле чувствительности (5) желательно найти такое сечение, которое образует одинаковые подсхемы. Это позволит сэкономить затраты за счет исключения повторного раскрытия одних и тех же схемных миноров. В этом состоит цель статьи.

Схемно-алгебраические формулы для нахождения чувствительности, содержащие две пары одинаковых подсхем. Разделим схему на рис. 1,а по $(n+1)$ -му узлу двумя способами: в первом (рис. 1,б) источник напряжения находится в левой подсхеме, а ИТУН и выходная сторона схемы – в правой; во втором (рис. 1,в) источник и ИТУН – в левой подсхеме, а выходная сторона схемы – в правой.

Запишем схемно-алгебраическую формулу (САФ) для чувствительности коэффициента передачи напряжения по параметру ИТУН, используя первый вариант деления схемы на рис. 1,б:

$$S_Y^K = -Y \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{2} \end{array} & \begin{array}{c} \text{3} \\ \text{4} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \text{3} \\ \text{6} \end{array} & \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{5} \end{array} \end{array} \right], \quad (7)$$

где каждый схемный определитель обозначен парой вертикальных линий.

Предлагаемая диакоптическая формула (7) для чувствительности коэффициента передачи напряжения по параметру ИТУН позволяет уменьшить на четверть число раскрываемых определителей подсхем, поскольку в ней из восьми подсхем различны только шесть. Такую же экономию дает деление схемы по второму способу – на рис. 1,в. При этом схемно-алгебраическая формула для чувствительности коэффициента передачи напряжения по параметру ИТУН Y имеет вид

$$S_Y^K = -Y \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \text{1}' \\ \text{2}' \end{array} & \begin{array}{c} \text{3}' \\ \text{4}' \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \text{5}' \\ \text{2}' \end{array} & \begin{array}{c} \text{7}' \\ \text{4}' \end{array} \end{array} \right]. \quad (8)$$

Из двух вариантов подсхем на рис. 1,б или рис. 1,в выбирается тот, который удовлетворяет требованиям половинного деления, обеспечивающим экономичное и компактное разложение схемных миноров [11]. Формулы вида (7) или (8) для чувствительности других передаточных функций и варьируемых параметров получаются аналогично.

О методе двоичных векторов (методе бисекции). Определитель схемы в виде соединения двух подсхем может быть представлен в виде [9]:

$$\Delta = \sum_{i=1}^d (-1)^{\sigma_i} \Delta 1(b_i) \Delta 2(\underline{b}_i), \quad (9)$$

где σ_i – знак i -го слагаемого, определяемый по двоичному вектору b_i , $\Delta 1(b_i)$ – схемный минор первой подсхемы, соответствующий b_i , матрицы первой подсхемы; $\Delta 2(\underline{b}_i)$ – схемный минор второй подсхемы, соответствующий дополнению двоичного вектора \underline{b}_i .

Двоичные векторы (ДВ) имеют размерность $2n$, где n – число общих узлов подсхем, не считая базисного узла. Первая (вторая) половина ДВ, содержащая n элементов, соответствует подсоединению аномальных элементов – неудаляемых генераторов (приемников). Существование генератора или приемника в некоторой позиции ДВ отмечается единицей. В противном случае в позиции ставится нуль.

Положение или позиции элементов в каждой из половин ДВ задается упорядоченным множеством внешних узлов подсхемы, исключая базисный узел. Обозначениями позиций ДВ служат обозначения узлов схемы.

Например, двоичное отображение формулы бисекции по трем узлам, востребованной в схемах на рис. 1,б и рис.1,в. Имеет вид:

$$1) 0000 ; 2) 0101 ; 3) 0110 ; 4) 1001 ; 5) 1010 ; 6) 1111 .$$

$$1111 \quad 1010 \quad 1001 \quad 0110 \quad 0101 \quad 0000$$

Таким образом, слагаемые формулы бисекции по трем узлам представлены шестью парами ДВ. Векторы каждой пары взаимно дополняют друг друга, отображая сомножители диакоптической формулы, относящиеся к первой и второй подсхеме соответственно.

Упорядоченное множество общих (или внешних) узлов подсхем, являющееся обозначением позиций ДВ, имеет вид: (1, 2, 1, 2) или кратко 1212. В силу одинаковой четности номеров у половин ДВ информацию о знаке слагаемого можно получить из расположения единиц в одном (любом) из векторов пары. Принимается во внимание порядковый номер единицы в той или иной половине ДВ. Положительный (отрицательный) знак выбирается в случае четной (нечетной) суммы порядковых номеров позиций, содержащих единицы, в ДВ.

Формирование множества ДВ подсхемы не встречает затруднений. Самое простое решение состоит в том, чтобы перебирать $2n$ -разрядные двоичные числа (от $2n$ нулей до $2n$ единиц) и выбирать те из них, которые содержат одинаковое количество единиц в первой и второй половинах разрядов. Это свойство, вытекающее из формулы (4.4) и определения ДВ, позволяет получить число ДВ подсхемы в виде

$$l = \sum_{i=0}^n \{n \ i\}^2, \quad (10)$$

где $\{n \ i\}$ – число сочетаний из n элементов по i . По этому количеству ДВ выполняется суммирование в формуле (9).

Имея множество ДВ для одной из подсхем, можно легко получить ДВ второй подсхемы, применив операцию дополнения двоичного числа. Это значит, что единицы в позициях ДВ заменяются нулями и наоборот.

Множество ДВ является унифицированным отображением миноров подсхем с одним и тем же числом узлов. Минор подсхемы, заданный некоторым ДВ, равен определителю схемы, которая получена из этой подсхемы в результате подсоединения неудаляемых генераторов и приемников согласно ее ДВ.

В простейшем случае определитель схемы, представленной двумя подсхемами, соединенными в двух узлах, можно выразить по методу ДВ так:

$$\Delta = \Delta_1(00) \Delta_2(11) + \Delta_1(11) \Delta_2(00). \quad (11)$$

В формуле (11) Δ_1, Δ_2 – схемные определители (схемные миноры) подсхем 1 и 2, полученные из соответствующих подсхем в результате подсоединения неудаляемых генераторов и приемников к узлам, позиции которых отмечены единицами в ДВ, указанных в скобках при Δ_1 и Δ_2 .

ДВ 00 не требует преобразований подсхем, а ДВ 11 указывает на подсоединение к внешним узлам первой или второй подсхемы неудаляемых генератора и приемника. Параллельное соединение этих аномальных элементов эквивалентно идеальному проводнику. Таким образом, формула (9) является двоичным представлением формулы Фойснера (1902г.).

В более сложных случаях аномальные генераторы и приемники должны быть пронумерованы в соответствии с их очередностью в ДВ, а именно, i -я по порядку единица в первой (второй) половине ДВ соответствует генератору i (приемнику i) i -го НУИ. Все шесть миноров подсхемы с тремя внешними узлами ($n=2, l=6$) изображены на рис. 2.

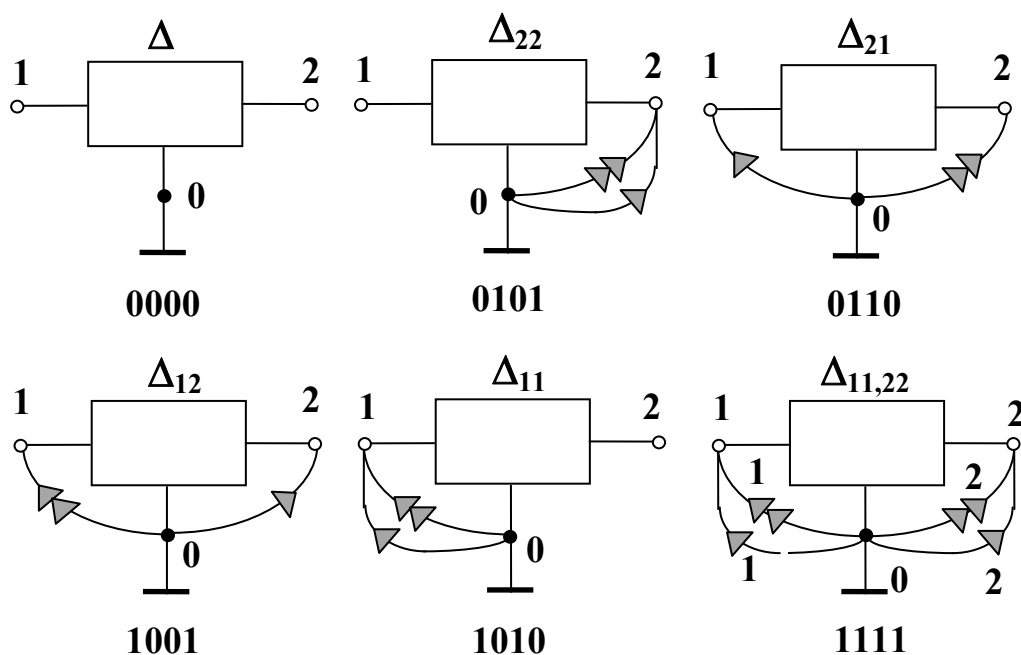


Рис. 2. Миноры подсхемы с тремя внешними узлами

При соединении подсхем в трех узлах определитель схемы находится по формуле:

$$\Delta = \Delta_1(0000)\Delta_2(1111) + \Delta_1(0101)\Delta_2(1010) - \Delta_1(0110)\Delta_2(1001) - \Delta_1(1001)\Delta_2(0110) + \Delta_1(1010)\Delta_2(0101) + \Delta_1(1111)\Delta_2(0000). \quad (12)$$

Бисекция с нуллорной связью. В выражении (7) подсхемы 1 и 2, так же как 1 и 5, являются зависимыми одна от другой через неудаляемый

управляемый источник (нуллорную связь). При этом одноименные неудаляемые генератор и приемник находятся в различных подсхемах. Аналогично этому в выражении (8) взаимно зависимы подсхемы 3', 4' и 7', 4'.

Чтобы применить метод ДВ в этом случае, необходимо в число общих узлов подсхем ввести дополнительный узел с номером n+1, как показано рис. 3 справа.

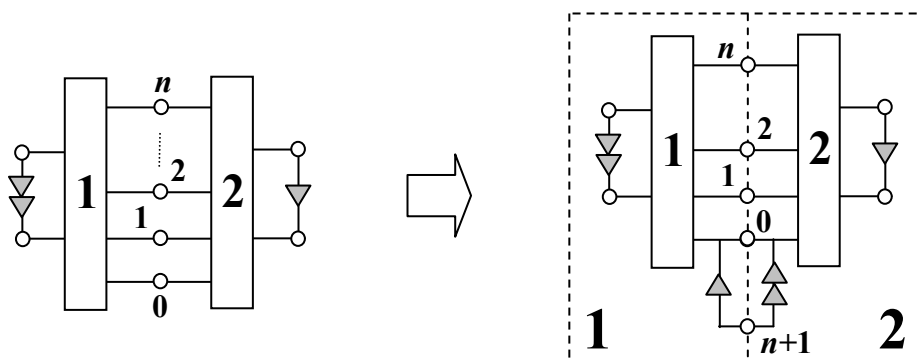


Рис. 3. Добавление общего узла с номером n+1 перед проведением бисекции

Новый узел добавлять не придется, если использовать неравновесные двоичные векторы [10]. Для практически важных случаев лучше применять или программировать готовые САФ. При делении схемы по двум узлам используется формула Хуанга [10]:

$$\left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \downarrow \\ \text{1} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \downarrow \\ \text{2} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \downarrow \\ \text{1} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \downarrow \\ \text{2} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right| \quad (13)$$

В случае бисекции по трем узлам используется формула с четырьмя слагаемыми [10]:

$$\left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \downarrow \\ \text{1} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \downarrow \\ \text{2} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \downarrow \\ \text{1} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \downarrow \\ \text{2} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \downarrow \\ \text{1} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \downarrow \\ \text{2} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \downarrow \\ \text{1} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \downarrow \\ \text{2} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \downarrow \\ \text{1} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \downarrow \\ \text{2} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right| \quad (14)$$

Свойство независимости чувствительности от подсхем, не содержащих варьируемых параметров. Это свойство проявляется в каскадных схемах при делении схемы по двум узлам ($n=1$ на рис. 1б и рис. 1в). Выход операционного усилителя – идеальный (неудаляемого генератора) или неидеальный (выход напряжения) при замыкании параллельным соединением неудаляемых генератора и приемника влечет вырождение схемы (обнуление соответствующего слагаемого формулы бисекции).

Формула бисекции по двум узлам (11) имеет всего два слагаемых, поэтому остается одно из них, и в формулах чувствительности (7) или (8) могут появиться общие множители числителя и знаменателя, которые требуют сокращения.

В силу дуальности возможно образование сокращающихся множителей в выражениях чувствительности транскондуктивных схем, когда к вырождению подсхемы приводит размыкание генератора тока (выхода транскондуктивного усилителя).

Из структуры формул (7) и (8) следует, что среди подсхем, содержащих варьируемый параметр, отсутствуют одинаковые, поэтому образование с ними сокращающихся множителей невозможно. Это доказывает свойство независимости чувствительности от подсхем, не содержащих варьируемых параметров, что иллюстрируется следующим примером.

Пример построения функции чувствительности для коэффициента передачи напряжения активного фильтра. Схема дана на рис. 4 [6]. Операционные усилители k_1, \dots, k_4 моделируются с помощью ИНУН с одноименными действительными коэффициентами передачи напряжения и выходными сопротивлениями R_1, \dots, R_4 . Требуется получить функцию $S_{C_5}^K$ относительной чувствительности коэффициента передачи напряжения при изменении емкости C_5 .

Схема делится на 3 подсхемы (ограничены пунктирными линиями на рис. 4) по узлам 5, 0 и 9, 0. Варьируемый параметр C_5 находится во второй

подсхеме, поэтому для получения функции чувствительности используются оба типа деления схемы на подсхемы, предложенные в формулах (7) и (8).

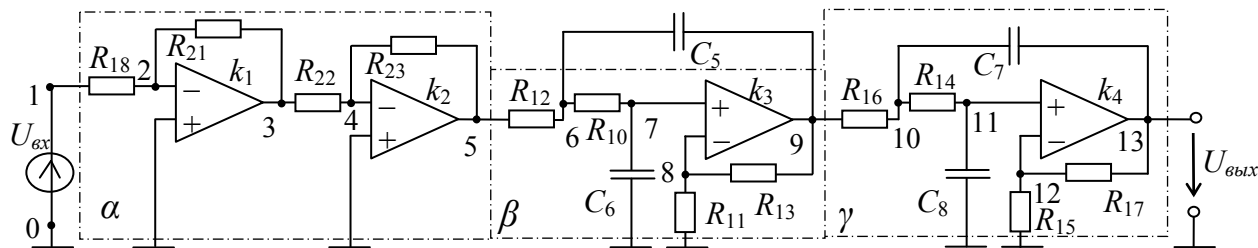


Рис. 4. Активный фильтр нижних частот четвертого порядка:
 α , β , γ – обозначения подсхем и их определителей

На основе подсхемы вида 1 (формула (7)) и подсхемы вида 4' (формула (8)) из формулы бисекции (13) находятся по одному схемному минору (рис. 5,а и 5,б). Эти подсхемы имеют по два полюса и одну нулловую связь со смежной подсхемой. Соответствующие схемные миноры сокращаются в числителе и знаменателе формулы (7).

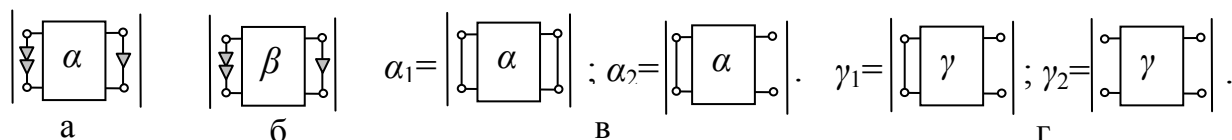


Рис. 5. Сокращающиеся (а), (б) и повторяющиеся (в), (г) схемные миноры

Для одинаковых подсхем вида 3 и 2' в формулах (7) и (8) находятся из формулы бисекции (11) по два схемных минора (рис. 5,в и 5,г), которые повторяются 2 и 3 раза соответственно. Остальные подсхемы в (7) и (8) различны, поэтому образуют неповторяющиеся схемные миноры (табл. 1).

Таблица 1. Неповторяющиеся схемные миноры для формулы бисекции (11)

β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9

С учетом обозначений схемных миноров на рис. 5, в–г и в табл. 1 формула для относительной чувствительности имеет вид

$$S_{C_5}^K = -y_5 \frac{(\gamma_1 \beta_1 + \gamma_2 \beta_2)(\alpha_1 \beta_3 + \alpha_2 \beta_4)}{[\alpha_2(\gamma_1 \beta_5 + \gamma_2 \beta_6) + \alpha_1(\gamma_1 \beta_7 + \gamma_2 \beta_8)] \beta_9}, \quad (15)$$

где $\alpha_1 = [R_{18}(k_1+1) + R_{21} + R_1]R_2(R_{22} + R_{23}) + R_1(R_{18} + R_{21})R_2$;

$\alpha_2 = (R_{18}(k_1+1) + R_{21} + R_1)(R_{22}(k_2+1) + R_{23} + R_2) + R_1(R_{18} + R_{21})(k_2+1)$;

$\beta_1 = k_3(R_{10}R_{11}y_6 - R_{13}) + (R_{10}y_6 + 1)(R_3 + R_{11} + R_{13})$; $\beta_2 = R_3(R_{10}y_6 + 1)(R_{11} + R_{13})$;

$\beta_3 = k_3(R_{11} + R_{13}) - y_6 R_3(R_{11} + R_{13})$; $\beta_4 = k_3 R_{12}(R_{11} + R_{13}) - R_3(R_{11} + R_{13})((R_{12} + R_{10})y_6 + 1)$;

$\beta_5 = y_5(k_3 R_{12}(R_{10}R_{11}y_6 - R_{13}) + R_3(R_{11} + R_{13})((R_{12} + R_{10})y_6 + 1) + R_{12}(R_{10}y_6 + 1)(R_3 + R_{11} + R_{13})) + ((R_{12} + R_{10})y_6 + 1)(R_{11}(k_3 + 1) + R_3 + R_{13})$;

$\beta_6 = R_3(R_{11} + R_{13})((R_{12}y_5 + 1)(R_{10}y_6 + 1) + R_{12}y_6)$;

$\beta_7 = (R_{10}y_5 + 1)(k_3 y_6 R_{11} + y_6(R_3 + R_{11} + R_{13})) + y_5(-k_3 R_{13} + (R_{11} + R_{13})(R_3 y_6 + 1) + R_3)$;

$\beta_8 = R_3(R_{11} + R_{13})(y_5(R_{10}y_6 + 1) + y_6)$; $\beta_9 = k_3(R_{11} + R_{13}) + (R_{10}y_6 + 1)y_5 R_3(R_{11} + R_{13})$;

$\gamma_1 = R_4(((R_{14} + R_{16})y_8 + 1)((R_{15} + R_{17})y_7 + 1) + R_{16}(R_{14}y_8 + 1)y_7) + y_7 R_{16}(k_4(R_{14}R_{15}y_8 - R_{17}) + (R_{14}y_8 + 1)(R_{15} + R_{17})) + ((R_{14} + R_{16})y_8 + 1)(R_{15}(k_4 + 1) + R_{17})$;

$\gamma_2 = (R_{14}y_7 + 1)y_8(k_4 R_{15} + R_{15} + R_{17} + R_4) + y_7(-k_4 R_{17} + (R_{15} + R_{17})(R_4 y_8 + 1) + R_4)$;

$y_5 = pC_5$; $y_6 = pC_6$; $y_7 = pC_7$; $y_8 = pC_8$.

Символьные выражения в (15) получены путем раскрытия схемных миноров по методу схемных определителей. Так, схемный минор α_1 имеет вид

$$\alpha_1 = \left| \begin{array}{c} \text{Circuit diagram with resistors } R_{18}, R_{21}, R_1, R_{22}, R_{23}, R_{11}, R_2 \text{ and voltage sources } U_1, U_2 \text{ connected at nodes } 2, 3, 4. \\ \end{array} \right| = d_{11}d_{22} + d_{12}d_{21}, \quad (16)$$

где d_{11} , d_{12} и d_{21} , d_{21} – определители первой 1* и второй 2* подсхемы (схемные миноры) при разомкнутых и замкнутых полюсах 3, 0 в соответствии с формулой бисекции (11) по двум узлам.

Символьные выражения схемных миноров определяются по формулам $d_{11} = R_{18}(k_1+1) + R_{21} + R_1$; $d_{22} = R_2(R_{22} + R_{23})$; $d_{12} = R_1(R_{18} + R_{21})$; $d_{21} = R_2$. Схемные миноры d_{22} и d_{12} совпадают по структуре и различаются только нумерацией элементов. Также совпадают по структуре схемные миноры γ_1 и β_5 , γ_2 и β_7 , поэтому из каждой пары достаточно найти один схемный

минор – второй находится из него путем формальной замены номеров у параметров.

Предлагаемое деление схем в формулах чувствительности (7) и (8) позволило получить формулу (15) с уменьшенным с 23 до 13 (более чем на 40%) числом раскрываемых схемных миноров за счет сокращения в числителе и знаменателе пар одинаковых миноров подсхемы α (рис. 5,а) и β (рис. 5,б), а также благодаря учету двух- и трехкратно повторяющихся двух миноров подсхемы α (рис. 5,в) и двух миноров подсхемы γ (рис. 5,в) соответственно.

Расчет чувствительностей автоматизирован с помощью программы CIRSVM, online-сервис которой имеется на сайте <http://intersyn.net/cirsym.html>.

Выводы. 1. Предложены диакоптические формулы (7) и (8) для относительной чувствительности схем каскадной структуры, что сводит решение к разложению удвоенного числа более простых схемных миноров. При этом число раскрываемых схемных миноров сокращается на четверть за счет образования одинаковых подсхем. 2. В примере практической схемы активного фильтра при делении на три подсхемы (комбинация формул (7) и (8)) число раскрываемых схемных миноров уменьшено на 40%. 3. Требуемые в формулах (7) и (8) схемные миноры находятся за одно обращение к разработанной программе CirSym.

Список литературы

1. Бодэ Г. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью: Пер. с англ.– М.: ГИИЛ, 1948.– 641 с.
2. Hoang S. Direct topological method in network sensitivity analysis// Archiwum Elektrotechniki.– 1975.– Т. 21, з. 4. – S. 767–784.
3. Balik F., Rodanski B. Calculation of symbolic sensitivities for large-scale circuits in the sequence of expressions form via the transimpedance method // Analog Integrated Circuits and Signal Processing. – Vol. 40. – 2004. – P. 265–276.
4. Asenova I. N. Calculation of first-, second-order and multiparameter symbolic sensitivity of active circuits by using nullor model and modified

Coates flow graph // International Journal of microelectronics and computer science.– Vol. 2, N. 4.– 2011. – P. 129–135.

5. Rodriguez-Chavez S., Palma-Rodriguez A.A., Tlelo-Cuautle E., Tan S. X.-D. Graph-based symbolic and symbolic sensitivity analysis of analog integrated circuits // Analog/RF and Mixed-Signal Circuit Systematic Design: Lecture Notes in Electrical Engineering.–Springer.–Vol.233.–2013.– P.101–122.

6. Mandache L., Iordache M., Dumitriu L., Sirbu I., Niculae D. Sensitivity analysis of analog circuits based on a modified nodal approach // International Conference on Optimization of Electrical and Electronic Equipment, May 22-24, 2014, Moieciu, Romania.– P. 83–88.

7. Курганов С.А., Филаретов В.В. Обобщенные безызбыточные формулы для чувствительности схемных функций линейных электрических цепей // Электричество.– 2017. –№2.– С. 44–50.

8. Горшков К.С., Курганов С.А., Филаретов В. В. Оптимизация полиномиальных функций чувствительности линейных электрических цепей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2017.– Вып.14.– С. 45–57.

9. Филаретов В. В. Метод двоичных векторов для топологического анализа электронных схем по частям // Электричество.– 2001.– № 8.– С. 33–42.

10. Курганов С.А., Филаретов В.В. Формирование передаточных функций электронных цепей по частям методом неравновесных двоичных векторов // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2005.– Ульяновск: УлГТУ, 2005. – Т. 3. – С. 106–116.

11. Курганов С.А., Филаретов В.В. Обобщенный метод схемных миноров для символьного анализа электрических цепей по частям // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2012.– Вып.10.– С. 228–237.

Недорезов Максим Владимирович – аспирант факультета аэромеханики и летательных аппаратов Московского Физико-Технического Института.
E-mail: nedmv@rambler.ru

МЕТОД ДЕСЯТИЧНЫХ ВЕКТОРОВ ДЛЯ СИМВОЛЬНОГО АНАЛИЗА ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ ПО ЧАСТЯМ

П. В. Недорезов, В. В. Филаретов

Предложено кодирование позиции каждой единицы двоичного вектора, указывающей на подсоединение к подсхеме норатора (нуллатора), соответствующим десятичным числом. Двоичный вектор с большим числом единиц отображается вектором десятичных чисел, что позволяет избежать хранения нулевых элементов и втрое упростить текст программы генерации формулы объединения параметров подсхем.

The coding of position for each element of the binary vector, indicating the connection to the subcircuit of the norator (nullator), corresponding to the decimal number, is proposed. A binary vector with a large number of units is displayed by a vector of decimal numbers, which avoids storing zero elements and simplifies the text of the program generating the formula of combining parameters of subcircuits three times.

О программе CirSym для символьного анализа электронных цепей. Метод схемных определителей [1] положен в основу программы символьного анализа CirSym [2]. Реализация в этой программе метода двоичных векторов как эффективного варианта символьной диакоптики обеспечила символьный анализ схем в десятки-сотни узлов и элементов [3]. Использование преимуществ матричного анализа для учета всех типов аномальных элементов [4] в следующей модернизации CirSym не привело к столь же значительному повышению эффективности программы.

Значение качества реализации анализа по частям и метода двоичных векторов возросло после полиномиальной модернизации CirSym [5], которая позволила сгенерировать символьные полиномиальные коэффициенты схемных функций для сложных тестов, включая

избирательный усилитель (рис. 1), а также операционные усилители $\mu A741$ и $\mu A725$.

В данной статье осуществляется совершенствование методики анализа по частям путем замены двоичных векторов на десятичные векторы для списочного кодирования только ненулевых элементов двоичного вектора. Аналогичный подход давно применяется в численных программах, реализующих матричные выкладки [6].

Ожидать столь же значительного эффекта, как при учете разреженности матрицы, в случае двоичного вектора нельзя, поскольку операции с битами самые быстрые в двоичном компьютере. Однако переход к десятичным векторам и уход от использования битовых операций уменьшит код и улучшит восприятие программы.

От двоичных векторов к десятичным векторам: свойство симметрии. Метод двоичных векторов (МДВ) в рамках аппарата схемных определителей позволяет многократно увеличить сложность анализируемых схем и на порядки сократить время вычислений. Исходная схема и ее подсхемы делятся рекурсивно на две подсхемы, то есть выполняется рекурсивная бисекция (нисходящий иерархический анализ).

Возможность анализа схемы по частям – в виде первой и второй подсхемы – достигается замещением другой подсхемы (второй или первой) некоторым набором аномальных элементов – нораторов (генераторов) и нуллаторов (приемников). Аномальность такого генератора или приемника отражается в его названии – «неудаляемый генератор или приемник».

Аномальные элементы подключаются к внешним узлам подсхемы, причем начальным узлом каждого генератора и приемника является базисный узел схемы с номером 0, обязательно входящий в число внешних узлов каждой подсхемы. Поэтому для отображения подсоединения аномальных элементов к подсхеме достаточно указывать конечные узлы генераторов и приемников,

Однако в двоичном векторе указываются не только узлы подключения генераторов и приемников (цифрой 1), но и узлы их неподключения (цифрой 0), что избыточно. Двоичный вектор имеет удвоенную размерность $2n$, где n – числа внешних узлов без базисного

узла. Первая половина двоичного вектора относится к генераторам, а вторая – к приемникам.

Множество двоичных векторов размерности $2n$ является подмножеством $2n$ -разрядных двоичных чисел. Двоичные числа, соответствующие двоичным векторам, отличаются от других двоичных чисел одинаковым числом единиц в первой (первых n позиций) и второй (следующие n позиций). В отличие от двоичных чисел имеет смысл рассмотрение только двоичных векторов, размерности кратной 2.

Во втором столбце табл. 1 приводятся множества 2-, 4- и 6-разрядных двоичных чисел. Среди них жирным шрифтом выделены двоичные векторы, которые перенесены в третий столбец этой таблицы. В четвертом столбце табл. 1 указаны десятичные числа, соответствующие двоичным векторам.

Фундаментальным свойством последовательности двоичных векторов, как и последовательности двоичных чисел в целом, является свойство симметрии, которое проявляется в выполнении соотношения (в десятичном коде) между симметричными элементами a и $a_{_}$:

$$a+a_{_}=2^{2n}-1-b. \quad (1)$$

Позиция (порядковый номер) элемента a отсчитывается с начала первой половины разрядов, а позиция элемента $a_{_}$ находится при счете от конца второй половины разрядов. Например, для последовательности при $n=2$: $\{0, 5, 6, 9, 10, 15\}$ свойство симметрии проявляется в равенствах: $0+15=5+10=6+9$.

Симметричные двоичные числа, в том числе двоичные векторы, являются взаимно дополняющими. Например, для вектора 0101 с кодом 5 дополняющим вектором является вектор с кодом 10, то есть 1010. Это, с первых версий программы CirSym [2] позволяет с минимальным объемом выкладок переходить от найденного двоичного вектора первой подсхемы к дополняющему двоичному вектору второй подсхемы.

Для минимизации вычислений учитывается, что симметричные половины последовательности двоичных векторов относятся соответственно к первой и второй подсхеме. Опять же вследствие симметрии вместо рассмотрения двоичного вектора целиком

целесообразно рассматривать его половины; половину для генераторов и половину для приемников.

Таблица 1. Получение двоичных векторов из двоичных чисел для $n=1, 2, 3$ при 2, 3, 4 внешних узлах подстанции (не считая базисного узла)

$2n$	Двоичные числа	Двоичные векторы	Десятичные числа
2	00 01 10 11	00 11	0 3
4	0000 0001 0010 0011 0100 0101 0110 0111 1000 1001 1010 1011 1100 1101 1110 1111	0000 0101 0110 1001 1010 1111	0 5 6 9 10 15
6	000000 000001 000010 000011 000100 000101 000110 000111 001000 001001 001010 001011 001100 001101 001110 001111 010000 010001 010010 010011 010100 010101 010110 010111 011000 011001 011010 011011 011100 011101 011110 011111 100000 100001 100010 100011 100100 100101 100110 100111 101000 101001 101010 101011 101100 101101 101110 101111 110000 110001 110010 110011 110100 110101 110110 110111 111000 111001 111010 111011 111100 111101 111110 111111	000000 001001 001010 001100 010001 010010 010100 011011 011101 011110 100001 100010 100100 101011 101101 101110 110011 110101 110110 111111	0 9 10 12 17 18 20 27 29 30 33 34 36 43 45 46 51 53 54 63

Запустив два вложенных цикла от 0 до $2^n - 1$, с индексами k и l , бракуя комбинации с индексами k и l , имеющими неравное число единиц в двоичном представлении, можно перечислить все двоичные векторы первой подстанции. Переход к двоичным векторам второй подстанции выполняется в тех же циклах по формулам:

$$k_{_} = 2^n - 1 - k, \quad l_{_} = 2^n - 1 - l, \quad (2)$$

вытекающим из свойства симметричности (1).

Метод десятичных векторов. Идея предлагаемого метода простая. Информация о необходимой модификации подстанций путем добавления аномальных элементов содержится не в нулях двоичных векторов и не в единицах, а в позициях расположения единиц. Эти позиции представляются в коде программы десятичным числом, поэтому логично использовать вместо двоичных векторов десятичные векторы.

Во втором и третьем столбцах табл.2 показаны первые половины двоичных векторов и их десятичное представление. В четвертом столбце приводятся десятичные векторы, элементами которых являются номера позиций, которые в двоичном векторе занимают единицы. Отсчет порядкового номера начинается с младшего разряда.

Таблица 2. Двоичные векторы и их десятичное представление, десятичные векторы и их машинный код для 2–4 внешних узлов

n + 1	Двоичный вектор	Десятичный код	Десятичный вектор, его знак sn и размер on			Представление в машинном коде
2	1	1	0	+	1	nus[1][0]=0;
3	01	1	0	+	1	nus[1][0]=0;
	10	2	1	-	1	nus[2][0]=1;
	11	3	01	-	2	nus[3][0]=0; nus[3][1]=1;
4	001	1	0	+	1	nus[1][0]=0;
	010	2	1	-	1	nus[2][0]=1;
	011	3	01	-	2	nus[3][0]=0; nus[3][1]=1;
	100	4	2	+	1	nus[4][0]=2;
	101	5	02	+	2	nus[5][0]=0; nus[5][1]=2;
	110	6	12	-	2	nus[6][0]=1; nus[6][1]=2;
	111	7	012	-	3	nus[7][0]=0; nus[7][1]=1; nus[7][2]=2;
5	0001	1	0	+	1	nus[1][0]=0;
	0010	2	1	-	1	nus[2][0]=1;
	0011	3	01	-	2	nus[3][0]=0; nus[3][1]=1;
	0100	4	2	+	1	nus[4][0]=2;
	0101	5	02	+	2	nus[5][0]=0; nus[5][1]=2;
	0110	6	12	-	2	nus[6][0]=1; nus[6][1]=2;
	0111	7	012	-	3	nus[7][0]=0; nus[7][1]=1; nus[7][2]=2;
	1000	8	3	+	1	nus[8][0]=3;
	1001	9	03	-	2	nus[9][0]=0; nus[9][1]=3;
	1010	10	13	+	2	nus[10][0]=1; nus[10][1]=3;
	1011	11	013	+	3	nus[11][0]=0; nus[11][1]=1; nus[11][2]=3;
	1100	12	23	-	2	nus[12][0]=2; nus[12][1]=3;
	1101	13	023	-	3	nus[13][0]=0; nus[13][1]=2; nus[13][2]=3;
	1110	14	123	+	3	nus[14][0]=1; nus[14][1]=2; nus[14][2]=3;
	1111	15	0123	+	4	nus[15][0]=0; nus[15][1]=1; nus[15][2]=2; nus[15][3]=3;

Пятый столбец табл.2 содержит представление десятичных векторов в двумерном массиве nUS , где первое измерение равно десятичному номеру отображаемого двоичного вектора (третий столбец табл.2), а второе измерение равно порядковому номеру, начиная с нуля, элемента в отображающем десятичном векторе (четвертый столбец табл.2).

Десятичные векторы в четвертом столбце табл.2 характеризуются знаками и размерностью (числом элементов). Положительный (отрицательный) знак вектора определяется по четности (нечетности) суммы его элементов (номеров позиций соответствующего двоичного вектора).

Формула бисекции представляет собой сумму слагаемых, каждое из которых является произведением двух множителей, соответствующих параметру первой или второй подсхемы. Первые сомножители получаются модификацией первой подсхемы путем подсоединения неудаляемых генераторов (приемников) согласно десятичному вектору для первой (второй) половины. Десятичные векторы объединяемых половин должны иметь такую же размерность.

При образовании вторых множителей слагаемых бисекции используются десятичные векторы половин для второй подсхемы, десятичные коды которых образованы по формулам (2) из соответствующих десятичных кодов десятичных векторов первой подсхемы. Знак слагаемого формулы бисекции положителен при обоих положительных или обоих отрицательных знаках у десятичных векторов половин первого сомножителя, и отрицателен в других сочетаниях.

Для примера рассмотрим переход от содержимого функции `binvec` к диакоптической формуле бисекции по трем узлам. Используем третью строку табл. 2 ($n+1=3$). Десятичный вектор с кодом 0, соответствующий двоичному вектору 00, не отображается, поскольку не содержит единиц, но будет использован при образовании множителя с десятичным вектором второй половины с таким же кодом 0.

Совместными (образующими первый сомножитель формулы бисекции) будут пары десятичных векторов с одинаковой размерностью.

Объединение десятичных векторов для первой подсхемы имеет вид: (0,0), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3). Отсюда с помощью формул (2) при $n=2$ получаем соответствующие множители (дополняющее отображение) для второй подсхемы: (3,3), (2,2), (2,1), (1,2), (1,1), (0,0).

Таким образом, формула трехузловой бисекции с помощью десятичных векторов запишется более кратко и понятно:

$$\Delta = \Delta_1(00)\Delta_2(33) + \Delta_1(11)\Delta_2(22) - \Delta_1(12)\Delta_2(21) - \Delta_1(21)\Delta_2(12) + \Delta_1(22)\Delta_2(11) + \Delta_1(33)\Delta_2(00). \quad (3)$$

Массивы `sn`, `on` и `nus` размещаются в функции `binvec`, текст которой помещен в приложении 1. Это не требует повторной генерации десятичных векторов до 5 внешних узлов включительно, что требуется для программы `CirSym` [2]. Функция `binvec` позволила сделать понятными диакоптические формулы бисекции, реализуемые в функциях `form` и `formp`, не отягощенных генерацией двоичных векторов. Текст функции `form` помещен в приложение 2.

Теперь для модификации активной подсхемы `act1` с `act1_n` элементами сообразно текущему десятичному вектору используется такой простой текст:

```
k_=s-k; l_=s-l;
for(i=0;i<n-on[k];i++)
nuiall(ext[n],ext[nus[k_] [i]],ext[n],ext[nus[l_] [i]],&act1_n,act1);
```

Здесь `ext` – вектор, отображающий позиции единиц (номера элементов десятичных векторов) в фактические номера внешний узлов.

Функция `nuiall` добавляет в описание схемы неудаляемые генератор и приемник между узлами 0 (`ext[n]`), и (`ext[nus[k_] [i]]`), а также 0 (`ext[n]`), и (`ext[nus[l_] [i]]`) соответственно. Конечные номера узлов не генерируются программным кодом, а вычисляются как элементы массива `nus`, постоянно находящегося в памяти.

Пример. Разложение определителя квазиполной схемы из проводимостей различными вариантами бисекции по 1, 2, 3, 4 и 5 узлам.

Граф схемы представлен на рис. 1. Как видно, этот граф отличается от полного графа с 12 узлами (66 ребер) отсутствием 8 ребер.

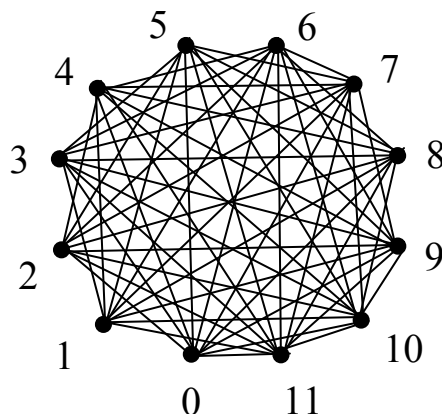


Рис. 1. Граф квазиполной схемы с 12 узлами и 58 проводимостями

Новая версия программы CirSym, в которой реализован предлагаемый метод десятичных векторов, выполняет генерацию формул бисекции, тысячи раз вызывая функцию form (приложение 2). Формулы бисекции по 2, 3, 4, 5 узлам применяются соответственно, начиная с 3, 5, 7, 9 узлов. Размеры формируемых выражений и время их генерации сведены в табл. 3. Численное значение определителя для всех режимов бисекции равно $\Delta=13551739344$ при параметрах элементов 1 См.

Таблица 3. Показатели формул и время генерации определителя квазиполной схемы проводимостей при различных параметрах бисекции

Показатели формулы	Используемые виды бисекции (число заданных узлов бисекции)				
	1	1, 2	1, 2, 3	1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4, 5
Число символов	545543991	369505048	337793907	267630753	220222365
Число секунд	382	282	306	275	276

Как видно из табл. 3, последовательное добавление видов бисекции приводит к более, чем двукратному, сокращению длины формируемого выражения и полуторакратному уменьшению времени генерации.

Приложение 1. Функция для хранения: десятичных векторов, числа элементов в этих векторах и знаков слагаемых формулы бисекции

```
void binvec(int n, char *sn, char *on, char nus[16][5])
{
if (n==1)
{ sn[0]=0; sn[1]=0;
on[0]=0; on[1]=1;
nus[1][0]=0;}
else if (n==2)
{ sn[0]=0; sn[1]=0; sn[2]=1; sn[3]=1;
on[0]=0; on[1]=1; on[2]=1; on[3]=2;
nus[1][0]=0;
nus[2][0]=1;
nus[3][0]=0; nus[3][1]=1;}
else if (n==3)
{ sn[0]=0; sn[1]=0; sn[2]=1; sn[3]=1; sn[4]=0; sn[5]=0; sn[6]=1; sn[7]=1;
on[0]=0; on[1]=1; on[2]=1; on[3]=2; on[4]=1; on[5]=2; on[6]=2; on[7]=3;
nus[1][0]=0;
nus[2][0]=1;
nus[3][0]=0; nus[3][1]=1;
nus[4][0]=2;
nus[5][0]=0; nus[5][1]=2;
nus[6][0]=1; nus[6][1]=2;
nus[7][0]=0; nus[7][1]=1; nus[7][2]=2;}
else if (n==4)
{ sn[0]=0; sn[1]=0; sn[2]=1; sn[3]=1; sn[4]=0; sn[5]=0; sn[6]=1; sn[7]=1;
sn[8]=1; sn[9]=1; sn[10]=0; sn[11]=0; sn[12]=1; sn[13]=1; sn[14]=0; sn[15]=0;
on[0]=0; on[1]=1; on[2]=1; on[3]=2; on[4]=1; on[5]=2; on[6]=2; on[7]=3; on[8]=1;
on[9]=2; on[10]=2; on[11]=3; on[12]=2; on[13]=3; on[14]=3; on[15]=4;
nus[1][0]=0;
nus[2][0]=1;
nus[3][0]=0; nus[3][1]=1;
nus[4][0]=2;
nus[5][0]=0; nus[5][1]=2;
```

```

nus[6][0]=1; nus[6][1]=2;
nus[7][0]=0; nus[7][1]=1; nus[7][2]=2;
nus[8][0]=3;
nus[9][0]=0; nus[9][1]=3;
nus[10][0]=1; nus[10][1]=3;
nus[11][0]=0; nus[11][1]=1; nus[11][2]=3;
nus[12][0]=2; nus[12][1]=3;
nus[13][0]=0; nus[13][1]=2; nus[13][2]=3;
nus[14][0]=1; nus[14][1]=2; nus[14][2]=3;
nus[15][0]=0; nus[15][1]=1; nus[15][2]=2; nus[15][3]=3;
} }

```

Приложение 2. Функция генерации формулы бисекции по 2–5 узлам
для режима компактной свертки (без вывода полиномов)

```

void form(int num,GRAPH *ac,char *ac0,int n,char *ext,
          PASSIVE *matr,SOURCE *act)
{
int i,k,k_,l,l_,m,s=1,s1,n1,act1_n,n11,act11_n,n12,act12_n;
unsigned long dl,dl1,dl2;
char nus[16][5],sn[16],on[16];

PASSIVE *a1;
SOURCE *act1;
binvec(n,sn,on,nus); // занесение в память шаблона для n-бисекции
fortest(num,ac,&n11,&act11_n,1); // подсчет элементов 1-й подсхемы
fortest(num,ac,&n12,&act12_n,2); // подсчет элементов 2-й подсхемы
dl2=leng+strlen(c);
for(i=1;i<=n;i++) s*=2; s--; // вычисление границы десятичного кода
for (k=0;k<=s;k++) // перебор десятичных кодов для аномальных генераторов
for (l=0;l<=s;l++) // перебор десятичных кодов для аномальных приемников
if(on[k]==on[l]) // рассматриваются только векторы одинаковой размерности
for (m=1;m<3;m++) { // при m=1(=2) разложение множителя 1-й(2-й) подсхемы
if (m==1) {
dl=leng+strlen(c);
if (dl != dl2) strcat(b++,"+");
n1=n11; act1_n=act11_n+on[k]; }
else {
strcat(b++,"*");

```



```

n1=n12; act1_n=act12_n+n-on[k]; }
if (n1) a1=( PASSIVE *) malloc (n1*sizeof(PASSIVE));
if (act1_n) act1=( SOURCE *) malloc (act1_n*sizeof(SOURCE));
fortrans(num,ac,matr,act,&n1,a1,&act1_n,act1,m,ac0);//выделение m-й подсхемы
if (m==1) {
if (!k) goto con;
for(i=0;i<on[k]-1;i++) // подключение аномальных генераторов и приемников
nuiall(ext[n],ext[nus[k][i]],ext[n],ext[nus[l][i]],&act1_n,act1);
if ((sn[k]+sn[l])%2) nuiall(ext[n],ext[nus[k][i]],ext[nus[l][on[k]-1]],ext[n],&act1_n,act1);
else nuiall(ext[n],ext[nus[k][i]],ext[n],ext[nus[l][on[k]-1]],&act1_n,act1); }
else {
k_=s-k; l_=s-l; // дополняющее отображение кодов для второй подсхемы
for(i=0;i<n-on[k];i++)
nuiall(ext[n],ext[nus[k_][i]],ext[n],ext[nus[l_][i]],&act1_n,act1); }
con: if (n1+act1_n > 1) strcat(b+,"");
dl1=leng+strlen(c);
gggf(n1,a1,act1_n,act1); // генерация множителя m-й подсхемы
if (n1) free(a1); if (act1_n) free(act1);
if (dl1>=leng+strlen(c)) { ster(dl); break; }
else if (n1+act1_n > 1) strcat(b+,""); // переход ко 2-му множителю
// или следующему слагаемому
}
frematr(n,matr); freact(act_n,act); }

```

Выводы

1. Рассмотрено образование двоичных векторов и свойство их симметрии. Предложено отображение каждого единичного разряда двоичного вектора десятичным числом, а всех единичных разрядов – десятичным вектором, что исключает обработку нулевых элементов двоичных векторов и упрощает формирование слагаемых диакоптической формулы бисекции.

2. Переход к десятичным векторам облегчает построение шаблонов формул бисекции по требуемому числу внешних узлов подсхем без предварительной генерации как двоичных, так и десятичных векторов, что предельно улучшает восприятие метода десятичных векторов и сокращает код программы.

3. Метод десятичных векторов реализован в новых функциях программы CirSym и подтвержден вариантами расчета по частям определителя квазиполной схемы проводимостей с 12 узлами. Выполненная модернизация программы CirSym не привела к существенному увеличению быстродействия, но значительно упростила сопровождение программы (в результате замены самого «мутного» инструментария), что облегчает разработку новых версий.

Список литературы

1. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // *Электричество*.– 1998.– № 5.– С. 43–52.– То же. Filaretov V.V. A topological analysis of electronic circuits by a parameter extraction method // *Electrical technology Russia*.– 1998.– N 2.– P. 46–61.

2. Филаретов В.В. Программа символьного анализа CIRSYM: история создания, структура и функции // *Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2012.– Вып. 10.– С. 158–171.*

3. Филаретов В.В. Метод двоичных векторов для топологического анализа электронных схем по частям // *Электричество*.– 2001.– № 8.– С. 33–42.

4. Недорезов М.В., Филаретов В.В. Алгебраический анализ зеркально-нулловых схем на основе выделения аномальных элементов // *Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2016.– Вып. 13.– С. 33–46.*

5. Недорезов П.В., Филаретов В.В. Символьно-полиномиальный анализ линейных электрических цепей методом схемных определителей // *Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2018.– Вып. 15.*

6. Писсанецки С. Технология разреженных матриц.– Москва: Мир, 1988.– 410 с.

7. Недорезов М.В., Курганов С.А., Филаретов В.В. Анализ чувствительности каскадных электронных схем делением их на части // *Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2018.– Вып. 15.*

Недорезов Петр Владимирович – студент Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета – ЛЭТИ им. В.И.Ленина.
E-mail: pyatakry@rambler.ru

О ЧАСТОТНОМ АНАЛИЗЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПО КРИТЕРИЮ МИХАЙЛОВА

С. А. Курганов, В. А. Соловьев

Рассмотрена возможность снижения трудоемкости анализа устойчивости произвольных линейных электрических цепей, в том числе, с взаимозависимыми реактивными элементами.

О частотном критерии устойчивости. Частотные методы, основанные на исследовании годографа комплексных определителей, нашли широкое распространение при анализе устойчивости электрических цепей [1, 2]. Согласно *критерию Михайлова* электрическая цепь устойчива, если вектор комплексного определителя $\Delta(j\omega)$ нигде не обращается в нуль и при изменении частоты ω от 0 до ∞ поворачивается на комплексной плоскости против часовой стрелки на угол $m\pi/2$, где m — порядок исследуемой схемы. Проблема состоит в том, что «определить порядок по количеству энергоемких элементов нельзя, поскольку многие из них являются взаимозависимыми» [3, с. 69], а построение полинома определителя является трудоемкой задачей.

В [3] указанная проблема решается путем модификации критерия Михайлова. *Модифицированный критерий*, не требующий нахождения порядка определителя, основан на свойстве монотонности годографа устойчивых систем, аргумент которого является возрастающей функцией частоты, а ее производная больше нуля. Наряду с производной должно проверяться выполнение свойства годографа устойчивой схемы уходить в бесконечность в квадранте, соответствующем порядку определителя. Таким образом, модифицированный критерий устойчивости требует проверки двух условий:

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \arg \Delta(j\omega) > 0 \quad (1) \text{ при } 0 < \omega < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{j\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{\Delta(j\omega)}{j\omega^{r+1}} \right| = 0, \quad (2)$$

где r – число квадрантов, которые пересек годограф.

Как видно, модифицированный критерий существенно сложнее классического критерия Михайлова, поскольку предусматривает построение при частотах от нуля до бесконечности не только годографа, но и производной от функции аргумента годографа, а также нахождение предела отношения функции годографа и частоты в степени, на единицу большей числа квадрантов, которые пересек годограф.

В то же время известен экономичный способ нахождения порядка произвольных линейных электрических цепей, в том числе, с взаимозависимыми реактивными элементами на основе поиска обобщенных емкостных и обобщенных индуктивных контуров и сечений – без построения полинома [4]. Поэтому желательно рассмотреть его применение к частотному анализу устойчивости электрических цепей по классическому критерию Михайлова.

В настоящей работе сравниваются два варианта частотного анализа устойчивости электрической цепи, содержащей взаимозависимые реактивные элементы: по *критерию Михайлова*, где порядок схемы находится на основе обобщенных емкостных и индуктивных контуров и сечений [4], и по *модифицированному критерию* на основе производной аргумента частотного годографа (1) и предела отношения функции годографа и частоты (2).

Нахождение порядка электрической цепи на основе обобщенных емкостных и индуктивных контуров и сечений. Порядок произвольной линейной схемы определяется без формирования характеристического уравнения по формуле [4]:

$$m = n_C + n_L - n_{SL} - n_{KC} - n_{KL} - n_{SC}, \quad (3)$$

где n_C, n_L – число конденсаторов и катушек индуктивности; n_{SL}, n_{KC} – число обобщенных индуктивных сечений и обобщенных емкостных контуров соответственно; n_{SC}, n_{KL} – число обобщенных емкостных сечений и обобщенных индуктивных контуров соответственно.

Обобщенные емкостные (индуктивные) контуры существуют двух типов: 1) из конденсаторов (индуктивностей), источников напряжения,

генераторов независимых и управляемых источников напряжения, и нураторов; 2) из конденсаторов (индуктивностей), приемников управляемых источников и нуллаторов. Обобщенные емкостные (индуктивные) сечения – также двух типов: 1) из конденсаторов (индуктивностей), генераторов независимых и управляемых источников тока, и нуллаторов; 2) из конденсаторов (индуктивностей), приемников напряжения управляемых источников и нуллаторов.

Поиск обобщенных емкостных (индуктивных) контуров выполняется в два этапа – по числу типов названных выше контуров. Сначала находится по электрической цепи совокупность емкостных (индуктивных) деревьев, содержащих емкости (индуктивности), генераторы независимых источников напряжения и нураторы. Затем – совокупность деревьев, содержащих емкости (индуктивности), приемники тока и нуллаторы. Число емкостных (индуктивных) контуров будет равно числу емкостей (индуктивностей), являющихся хордами для выбранных деревьев.

Обобщенные емкостные (индуктивные) сечения находятся также путем построения совокупности емкостных (индуктивных) деревьев двух типов из соответствующих элементов. Однако число емкостных (индуктивных) сечений определяется здесь по совокупности дополнений для выбранных деревьев, которое будет равно числу емкостей (индуктивностей), при последовательном удалении которых из дополнений образуются дополнительные несвязные подграфы.

Анализ устойчивости фильтра верхних частот с взаимозависимыми реактивными элементами по критерию Михайлова. Схема фильтра приведена на рис. 1,а [5]. Усилитель напряжения K моделируется источником напряжения, управляемым напряжением, с коэффициентом усиления k . Для этой схемы в формуле (3): $n_C = 6$; $n_L = 0$; $n_{SL} = 0$; $n_{SC} = 0$; $n_{KL} = 0$. Число емкостных контуров n_{KC} находится по схеме определителя на рис. 1,б, где утолщенными линиями выделено *емкостное дерево*, содержащее конденсаторы C_1 , C_6 и генератор источника напряжения. Остальные 4 конденсатора C_2 , C_3 , C_4 , C_5 являются хордами, следовательно, число емкостных контуров $n_{KC} = 4$.

После подстановки значений n_C ; n_L ; n_{SL} ; n_{SC} ; n_{KL} и n_{KC} в формулу (3) получим порядок схемы $m = 2$. Для подтверждения этого приведем символическое выражение определителя, полученное с помощью программы символического анализа электрических цепей CirSym (автор В.В. Филаретов) [6]:

$$D = p^2(C_3((C_5+C_4)(-k+1)+C_6)+C_5((C_2+C_1)(-k+1)+C_4(-k+1))+(C_2+C_1)((C_6+C_4))+C_4C_6)+ \\ + p(C_3(G_5(-k+1)+G_6)+C_5(G_2(-k+1)+G_3(-k+1))+(C_2+C_1)(G_5(-k+1)+G_6)+C_4((G_5+G_3)(-k+1))+ \\ + G_6+G_2)+C_6(G_3+G_2))+(G_3+G_2)(G_5(-k+1)+G_6). \quad (4)$$

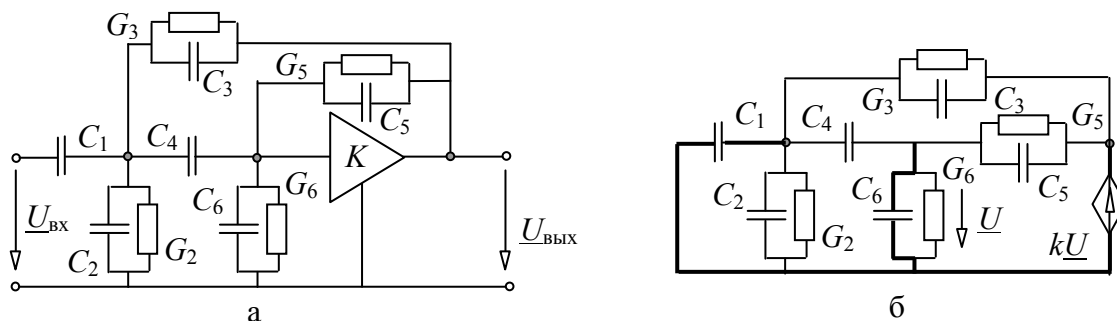


Рис. 1. Фильтр верхних частот: исходная схема (а); схема определителя (б)

Годограф Михайлова построен на рис. 2,а путем численного расчета действительной и мнимой части определителя по узловым уравнениям с помощью системы Maple [7] при следующих значениях параметров: $G_2=0,5$ мСм; $G_3=0,5$ мСм; $G_5=0,5$ мСм; $G_6=0,5$ мСм; $C_1=50$ нФ; $C_2=10$ нФ; $C_3=10$ нФ; $C_4=75$ нФ; $C_5=10$ нФ; $C_6=10$ нФ; $k=-10000$. Как видно, кривая не проходит через ноль и пересекает два квадранта при движении против часовой стрелки. Число квадрантов равно порядку схемы m , следовательно, схема устойчива.

Сравнение с модифицированным критерием Михайлова (1). Для проверки положительности выражения (1) на всей оси частот необходимо получить численным дифференцированием функцию производной от аргумента определителя и построить график (рис. 2,б) этой функции, используя уже упомянутые узловые уравнения. Как видно из графика, условие положительности (1) выполняется.

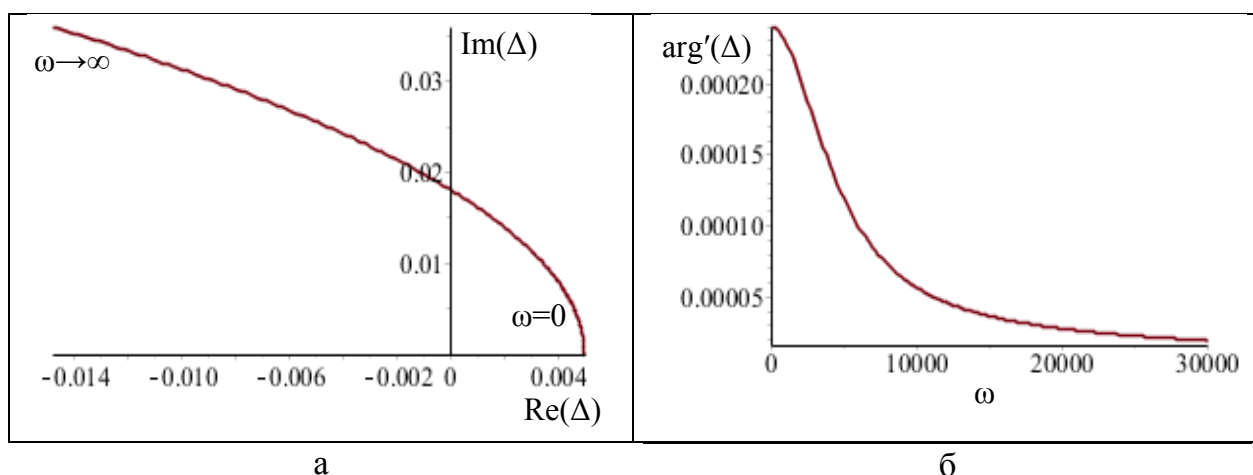


Рис. 2. Графики годографа (а) и производной аргумента определителя (б)

Для проверки условия (2) необходимо построить годограф определителя (рис. 2,а) и график (рис. 3) отношения модуля определителя к частоте в степени, на единицу большей числа r квадрантов, которые пересек годограф. Из рис. 2,а видно, что $r = 2$. График (рис. 3) отношения (2) при возрастании частоты стремится к нулю, поэтому условие (2) модифицированного критерия Михайлова выполняется, и, следовательно, схема устойчивая.

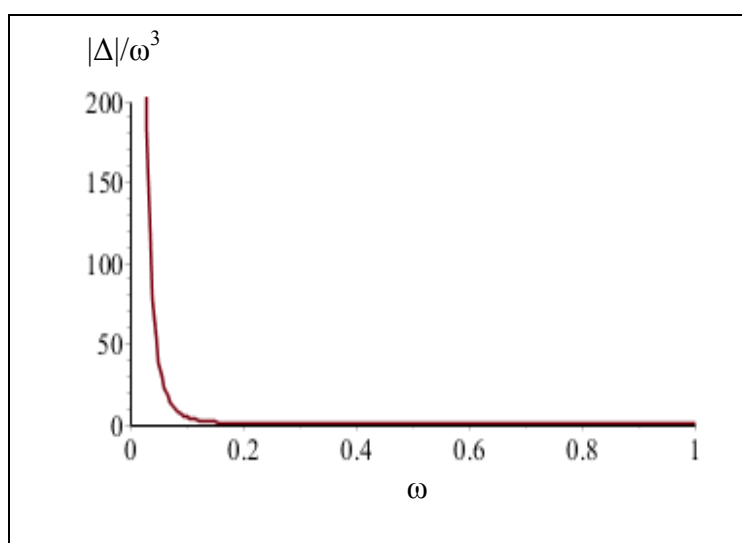


Рис. 3. График отношения модуля определителя к частоте в степени, на единицу большей числа квадрантов годографа

Выводы

1. Критерий Михайлова в сочетании с формулой (3) определения порядка произвольной электрической цепи, в том числе, с

взаимосвязанными реактивными элементами позволяет исследовать устойчивость цепи без трудоемкого построения степенного полинома определителя.

2. Исследование устойчивости по критерию Михайлова экономичнее по вычислительным затратам, чем модифицированный критерий, который требует исследования на всей частотной оси не только годографа, но и дополнительно еще двух функций – производной от функции аргумента, и отношения модуля определителя и частоты в степени, на единицу большей числа квадрантов годографа.

Список литературы

1. Suarez A. Check the stability // Microwave magazine.– IEEE, June 2015.– P. 69–90.

2. Yao H., Ning X., Su Y., Liu X., Jin Z. A Method for Loop-Circuit Stability Analysis // Proc. of 2013 International Workshop on Microwave and Millimeter Wave Circuits and System Technology.– IEEE, 2013.– P. 395–398.

3. Гридин В.Н., Михайлов В.Б., Шустерман Л.Б. Численно-аналитическое моделирование радиоэлектронных схем. – М.: Наука, 2008. – 339 с.

4. Курганов Д.С., Курганов С.А., Филаретов В.В. Нахождение порядка сложности произвольной активной электрической цепи методом схемных определителей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2008.– С. 140–151.

5. Оптимальная реализация линейных электронных *RLC*-схем / Ланнэ А.А., Михайлова Е.Д., Саркисян Б.С., Матвийчук Я.Н.– Киев: Наук. думка, 1982.– 208 с.

6. Филаретов В. В. Программа символьного анализа CIRSYM: история создания, структура и функции // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2012.– Вып. 10.– С.158–171.

7. Дьяконов В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах.– ДМК Пресс, 2011.– 800 с.

Курганов Сергей Александрович – д-р техн. наук, профессор кафедры «Электроснабжение» Ульяновского государственного технического университета. 432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32. Тел. 8-8422-77-81-05. E-mail: sak@ulstu.ru.

Соловьев Владимир Алексеевич – студент третьего курса энергетического факультета Ульяновского государственного технического университета. E-mail: soloviev247@yandex.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ УСТРОЙСТВ

ВЕКТОРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СВОБОДНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Е. Н. Меньшов

Постановка задачи. Рассмотрим такие стационарные волновые процессы, которые изменяются во времени по гармоническому закону, а их амплитуда описывается однородным уравнением Гельмгольца [1]:

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + c_0 \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (1)$$

где $\psi(\mathbf{r})$ – скалярная физическая характеристика волнового процесса, \mathbf{r} – радиус вектор точки, c_0 – постоянное или зависимое от координат число.

Уравнение Гельмгольца описывает все разновидности колебаний в распределенных механических системах, а также компоненты векторов и потенциалов в электромагнитных системах. В квантовой механике его называют уравнением Шредингера [2].

Рассмотрим сферически симметричную систему в неограниченной области. В начале координат значение $\psi(0)$ конечное и может быть равно нулю; на бесконечности $\psi(\infty) = 0$.

Такая задача относится к внешней краевой задаче. В [1] отмечено, что в неограниченной области внешняя краевая задача при $c < 0$ имеет

единственное решение, стремящееся к нулю на бесконечности, поэтому эта задача не противоречит физическому смыслу.

Решение уравнения (1) в сферических координатах описано в литературе, например, в [3]. Разделяя переменные, запишем искомую функцию

$$\psi(r, \varphi, \theta) = CR(r)P(\theta)\Phi(\varphi) = Y(r, \theta)\Phi(\varphi) \quad (2)$$

и дифференциальные уравнения, соответствующие разделенным переменным:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left\{ c_0 - \frac{\lambda}{r^2} \right\} R = 0; \quad (3)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \mu^2 \Phi = 0; \quad (4)$$

$$\frac{d}{d\cos\theta} \left[(1 - \cos^2\theta) \frac{dP(\theta)}{d\cos\theta} \right] + \left[\lambda - \frac{\mu^2}{1 - \cos^2\theta} \right] P(\theta) = 0, \quad (5)$$

где λ и $\mu = m$ – коэффициенты разделения, C – постоянная интегрирования, которая может зависеть от целых чисел m и l ; решением уравнения (5) являются $P(\theta) = P_l^m(\cos\theta)$ – присоединенные функции Лежандра.

С помощью уравнений (3) – (5) можно определить собственные функции исследуемой задачи, которые должны быть однозначны и непрерывны. Чтобы удовлетворить этому условию коэффициент λ должен быть $\lambda = l(l + 1)$, где $l = 0, 1, 2, \dots$. Собственные функции по координате φ должны иметь период 2π , вследствие чего из требования однозначности решения уравнения (4) вытекает, что значение μ должно быть $\mu = m$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Поскольку $P_l^m(\cos\theta) = 0$ при $m > l$, то при заданном l число m может принимать лишь $(2l + 1)$ различных значений:

$$m = -l, -l + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l - 1, l. \quad (6)$$

Искомые векторные характеристики физических величин $\psi(\mathbf{r})$ должны быть вещественными, поэтому будем искать вещественные решения (3) – (5). Этому требованию для уравнения (3) удовлетворяет условие $c < 0$.

Решением уравнения (4) являются гармонические функции :

$$\Phi(\varphi) = \cos(\varphi'_0 + m\varphi) = \sin(\varphi_0 + m\varphi). \quad (7)$$

Первая векторная характеристика рассматриваемой задачи.

Представим (2) на основе (7) в следующем виде:

$$\begin{cases} \psi_+(r, \varphi, \theta) = Y(r, \theta) \sin(\varphi_0 + m\varphi); \\ \psi_-(r, \varphi, \theta) = Y(r, \theta) \sin(\varphi_0 - m\varphi); \\ m = 0, 1, 2, \dots, l. \end{cases} \quad (8)$$

На основе (1) и (8) составим следующее выражение:

$$\psi_- \nabla^2 \psi_+ - \psi_+ \nabla^2 \psi_- = 0,$$

которое преобразуется к вектору ζ :

$$\psi_- \nabla^2 \psi_+ - \psi_+ \nabla^2 \psi_- = \nabla(\psi_- \nabla \psi_+ - \psi_+ \nabla \psi_-) = \nabla \zeta = 0; \quad (9)$$

$$\zeta = (\psi_- \nabla \psi_+ - \psi_+ \nabla \psi_-), \quad (10)$$

где оператор набла в сферических координатах запишем в следующем виде

$$\nabla = \nabla_{r,\theta} + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Вычислим вектор (10) на основе (2) с учетом (8). Сначала вычислим соответствующие градиенты:

$$\nabla \psi_+ = \sin(\varphi_0 + m\varphi) \nabla_{r,\theta} Y(r, \theta) + mY(r, \theta) \frac{\cos(\varphi_0 + m\varphi) \mathbf{e}_\varphi}{r \sin \theta};$$

$$\nabla \psi_- = \sin(\varphi_0 - m\varphi) \nabla_{r,\theta} Y(r, \theta) - mY(r, \theta) \frac{\cos(\varphi_0 - m\varphi) \mathbf{e}_\varphi}{r \sin \theta}.$$

Потом проведем *вычитание* из выражения

$$\frac{\psi_- \nabla \psi_+}{Y(r, \theta)} =$$

$$= \sin(\varphi_0 - m\varphi) \left(\sin(\varphi_0 + m\varphi) \nabla_{r,\theta} Y(r, \theta) + mY(r, \theta) \frac{\cos(\varphi_0 + m\varphi) \mathbf{e}_\varphi}{r \sin \theta} \right)$$

следующего выражения

$$\frac{\psi_+ \nabla \psi_-}{Y(r, \theta)} =$$

$$= \sin(\varphi_0 + m\varphi) \left(\sin(\varphi_0 - m\varphi) \nabla_{r,\theta} Y(r, \theta) - mY(r, \theta) \frac{\cos(\varphi_0 - m\varphi) \mathbf{e}_\varphi}{r \sin \theta} \right).$$

Разность примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{mY(r, \theta)}{r \sin \theta} [\sin(\varphi_0 - m\varphi) \cos(\varphi_0 + m\varphi) + \sin(\varphi_0 + m\varphi) \cos(\varphi_0 - m\varphi)] \mathbf{e}_\varphi = \\ = \frac{mY(r, \theta)}{r \sin \theta} \sin(\varphi_0 - m\varphi + \varphi_0 + m\varphi) \mathbf{e}_\varphi, \end{aligned}$$

из которой следует *вещественный азимутальный характерный вектор* ζ :

$$\zeta_r = \zeta_\theta = 0; \quad \zeta_\varphi = \zeta = \frac{mY^2(r, \theta)}{r \sin \theta} \sin(2\varphi_0) \mathbf{e}_\varphi, \quad (11)$$

дивергенция (9) которого равна нулю, поэтому он *непрерывен*.

Замечание. Если бы вместо представлений (7) и (8) использовать традиционное представление в комплексной форме $\Phi(\varphi) = e^{jm\varphi}$ [5], то

азимутальный характерный вектор (11) получился бы чисто мнимым, что обесценивало бы его достоверность. Поэтому в этом разделе был разработан модифицированный метод для получения вещественного вектора (11).

Вторая векторная характеристика рассматриваемой задачи. В качестве второй векторной характеристики должен выступать момент вектора [6]. Поскольку вектор ζ непрерывен и зависит от координат r и θ , то момент такого вектора можно вычислить следующим образом

$$\mathbf{M} = \iiint_V [\mathbf{r} \times \zeta] dV. \quad (12)$$

Выражение (12) накладывает определенные требования на размерность ζ и на функцию $Y(r, \theta)$. При этом размерность ζ должна выражать поверхностную плотность некоторой физической величины.

Функция $Y(r, \theta)$ должна удовлетворять требованию конечности при бесконечном объеме интегрирования $V \rightarrow \infty$, поэтому коэффициент c_0 в (1) не может быть просто постоянной величиной.

Например, требованию конечности функция $Y(r, \theta)$ удовлетворяет следующий вид зависимости коэффициента c для уравнения (1):

$$c(r) = -c_1 + \frac{2c_2}{r}, \quad (13)$$

где c_1 и c_2 – постоянные числа.

Решение уравнения (3) с учетом (13) возможно при условии, что $c_2/\sqrt{c_1} = n$ являются натуральными числами, которое имеет вид [5]:

$$R(r) = e^{-0.5\rho} \rho^l L_k^{(2l+1)}(\rho),$$

где $L_k^{(2l+1)}(\rho) = \frac{e^\rho \rho^{-2l-1}}{k!} \frac{d^k}{d\rho^k} (e^{-\rho} \rho^{k+2l+1})$ – полином Лагерра; $\rho = 2\sqrt{c_1}r$, $k = n - l - 1$.

$$\text{В (12) } [\mathbf{r} \times \zeta] = r\zeta[\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi] = -r\zeta\mathbf{e}_\theta; \quad dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi.$$

Подставляя в (12) соответствующие выражения, получим:

$$\mathbf{M} = -mC \sin(2\varphi_0) \int_0^\infty e^{-\rho} \rho^{2l} [L_k^{(2l+1)}(\rho)]^2 r^2 dr \int_0^\pi [P_l^m(\varepsilon)]^2 d\theta \int_0^{2\pi} \delta_{mm} \mathbf{e}_\theta d\varphi,$$

где $\varepsilon = \cos\theta$.

Выразим \mathbf{e}_θ в декартовых координатах

$$\mathbf{e}_\theta = i\cos\theta\cos\varphi + j\cos\theta\sin\varphi - k\sin\theta$$

и вычислим последний интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{e}_\theta d\varphi = -2\pi\sin\theta\mathbf{k}.$$

$$\mathbf{M} = \frac{2\pi m C^2 \delta_{mm'} \sin(2\varphi_0) k}{(2\sqrt{c_1})^3} \int_0^\infty e^{-\rho} \rho^{2l+2} [L_k^{(2l+1)}(\rho)]^2 \delta_{ll'} d\rho \int_{-1}^1 [P_l^m(\varepsilon)]^2 d\varepsilon.$$

В последнем выражении оба интеграла известны [5, 7], поэтому вторая векторная характеристика задачи принимает следующий вид:

$$\mathbf{M} = m\mathbf{k} \frac{2\pi C^2 \sin(2\varphi_0)}{(2\sqrt{c_1})^3} \frac{4n(l+m)!(l+n)!(n-l-1)}{(2l+1)(l-m)!} \delta_{mm'} \delta_{ll'}. \quad (14)$$

Символы Кронекера $\delta_{mm'}$ и $\delta_{ll'}$ обозначают ортогональность сферических функций.

Применение векторных характеристик. В [8] установлено, что модифицированные уравнения Максвелла допускают решение в форме решения стационарного уравнения Шредингера для движения электрона в центрально-симметричном кулоновском поле и дают строгое классическое обоснование отсутствия излучения энергии электромагнитного поля на стационарных орбитах атома водорода. При этом в уравнении Гельмгольца (1) в качестве функции $\psi(\mathbf{r})$ выступает азимутальная стационарная составляющая векторного потенциала A_φ , а в (13) $\sqrt{c_1} = 1/r_B n$, $c_2 = 1/r_B$, где r_B – радиус первой боровской орбиты в атоме водорода, n – главное квантовое число.

С векторным потенциалом связана плотность тока. Так как вектор $\boldsymbol{\zeta}$ удовлетворяет условию непрерывности (9), поэтому он должен быть пропорционален некоторой плотности тока \mathbf{j}_φ , которому соответствует квантово-механический орбитальный магнитный момент $M_z = m q_e \hbar / 2 m_e = \mu_B m$, где μ_B – магнетон Бора. Используем эту связь для определения постоянных интегрирования C в частных решениях (2) уравнения (1).

Отметим, что в (11) размерность $\boldsymbol{\zeta}$ определяется коэффициентом C^2 , тогда как размерность $\mathbf{j}_\varphi \sim \mathbf{A}_\varphi$ будет определяться коэффициентом C , поэтому выражение для плотности тока должно быть следующего вида

$$\mathbf{j}_\varphi = \frac{m C (R(r) P(\theta))^2}{r \sin\theta} \sin(2\varphi_0) \mathbf{e}_\varphi, \quad (15)$$

а в соответствии с (14) выражение для магнитного момента должно быть

$$\mathbf{M}_z = m\mathbf{k} \frac{\pi C \sin(2\varphi_0)}{(\sqrt{c_1})^3} \frac{n(l+m)!(l+n)!(n-l-1)}{(2l+1)(l-m)!}. \quad (16)$$

Сопоставляя модуль выражения (16) с $M_z = \mu_B m$, получим значение постоянной интегрирования C для описания A_φ в форме выражения (2):

$$C = C_{nlm} = \frac{\pi \mu_B (2l+1)(l-m)!}{r_B^3 n^4 (l+m)!(l+n)!(n-l-1) \sin(2\varphi_0)}.$$

Выводы

1. Рассмотрены задачи и условия, при которых стационарные волновые процессы характеризуются скрытыми векторными характеристиками.

2. Представлен пример, в котором в рамках классической электродинамики (на основе новых уравнений Максвелла) раскрыто описание квантово-механических орбитальных магнитных моментов атома. Применение модифицированных уравнений Максвелла сокращает разрыв между классической и квантовой теориями ЭМП.

Список литературы

1. Математический энциклопедический словарь/ Гл. ред. Ю. В. Прохоров. – М.: Сов. энциклопедия, 1998. – 847 с.
2. Физический энциклопедический словарь / Гл. ред. А.М. Прохоров. – М.: Сов. энциклопедия, 1984. – 944 с.
3. Кошляков Н. С. и др. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики / В. И. Смирнов. – М.: Наука, 1981. – Т. 4.– Ч.2. – 505 с.
5. Матвеев А.Н. Квантовая механика и строение атома. – М.: Высш. шк., 1965. – 355 с.
6. Аппель П. Теоретическая механика. Статика. Динамика точки. – Т.1. – М.: Физматгиз, 1960. – 515 с.
7. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 342 с.
8. Меньшов Е.Н. Способ и результаты решения модифицированных

уравнений Максвелла; ФГБУН Ульянов.гос. техн. ун-т. – Ульяновск, 2017. – 11 с. – Деп. в ВИНТИ 05.06.2017, № 66. – В 2017.

Меньшов Евгений Николаевич – канд. техн. наук, доцент УлГТУ, г. Ульяновск.
E-mail: raynd2@rambler.ru

РАСЧЁТ САМО - И ВЗАИМОИНДУКТИВНОСТИ В ТРЁХФАЗНОМ ТРАНСФОРМАТОРЕ СО СХЕМОЙ СОЕДИНЕНИЯ ОБМОТОК «ЗВЕЗДА–ЗИГЗАГ»

И. А. Шкуропат

Рассмотрено построение уравнений электрических цепей однофазного двух обмоточного трансформатора со схемой соединения обмоток Y/Z_0 . Показано, что параметры электрической схемы трансформатора имеют физический смысл магнитного рассеяния.

The electrical circuits equations and the parameters of the transformer electrical equivalent circuit Y/Z_0 is considered. The parameters of the electrical equivalent circuit have a the meaning of magnet leakage.

Электромагнитное рассеяние в моделировании трансформаторов. Электромагнитные цепи трансформатора содержат как составные части обмотки и магнитную систему. Схемы замещения этих цепей строятся таким образом, чтобы соответствовать происходящим в трансформаторе электромагнитным процессам и адекватно отражать их влияние на внешнюю электрическую цепь.

Построение схемы замещения трансформатора должно учитывать электромагнитное рассеяние, показывающее, что индуктивности первичной и вторичной обмоток трансформатора, а также взаимоиндуктивность между ними, приведённые к одному числу витков, различаются между собой. Поэтому при нагрузке первичное напряжение

не полностью трансформируется во вторичное напряжение. Теоретические вопросы по электромагнитному рассеянию и схемам замещения трансформаторов обстоятельно изложены в работах Шакирова по новой теории трансформаторов [1,2].

Параметры ветвей схемы замещения определяются основными конструктивными данными активной части трансформатора, такими, как активное сечение стержня магнитопровода, средние диаметры, радиальные размеры и высота обмоток. Представление в виде аналитической зависимости параметров схемы замещения от основных размеров активной части, возможно, конечно, только при идеализированной модели трансформатора, может дать возможность более полного анализа электромагнитных процессов в трансформаторе.

Для строгого математического описания геометрии активной части трансформатора прделываются следующие мысленные операции [1]: ярма заменяются полупространствами с бесконечно большой магнитной проницаемостью; высоты обмоток полагаются равными длине стержня. В результате магнитное поле в пределах объёма обмоток содержит только осевую составляющую. В этом случае само- и взаимоиндуктивности отдельных концентрических обмоток трансформатора выражаются аналитически через конструктивные параметры.

Путь магнитного потока рассеяния обмоток проходит по межобмоточному каналу вдоль стержня от ярма к ярму. Полный магнитный поток фазы трансформатора условно разделяем на две составляющие, рассматриваемые отдельно: магнитный поток сердечника, все силовые линии которого полностью замыкаются только по стали и сцепляются со всеми витками первичной и вторичной обмоток; магнитный поток, проходящий вне стали в пространстве, занятом обмотками, и частично по магнитопроводу.

В [3] принят следующий подход. Магнитное рассеяние обмоток трактуется как условное деление магнитного поля, наводимого каждой из обмоток, на поле в стали магнитопровода и поле в окне магнитопровода. Соответственно, индуктивности отдельных обмоток и взаимоиндуктивности между ними имеют две составляющие: само- или взаимоиндуктивность рассеяния и индуктивность от потока в сердечнике,

которые при идеализированной модели трансформатора могут быть выражены через конструктивные параметры обмоток трансформатора.

Принимается, что для установившегося режима работы токи, напряжения и магнитные потоки изменяются гармонически и представляются в комплексной форме записи. С этой целью соответственно выделяются из собственных индуктивностей первичной L_{11} и вторичной L_{22} обмоток и взаимоиנדуктивности между ними M_{12} две составляющие: одна, обусловленная магнитным потоком в стержне, и другая - магнитными потоками рассеяния, проходящими вне стали.

Следует отметить, что магнитный поток рассеяния отдельных обмоток трансформатора пренебрежимо мал в режиме холостого хода по сравнению с потоком в магнитопроводе, однако с ростом нагрузки трансформатора становится всё более существенным и определяющим электромагнитные процессы.

Рассматриваются однофазные двухобмоточные трансформаторы с концентрическими броневыми ярами при обычно принимаемом допущении, что в пределах обмоток и канала рассеяния между ними силовые магнитные линии параллельны оси стержня.

Само- и взаимоиנדуктивности рассеяния отдельных обмоток трансформатора определяются магнитными проводимостями соответствующих каналов рассеяния в окне магнитопровода между самими обмотками и стержнем [3]. При принятой [1,2] идеализированной конструктивной модели для них можно получить аналитические выражения, зная геометрические параметры обмоток, такие средние диаметры обмоток, радиальные размеры обмоток, среднюю высоту обмоток. Подчеркнем, что понятие геометрическая индуктивность (взаимоиנדуктивность) здесь означает индуктивность (взаимоиנדуктивность) обмотки на один виток. Подразумевается также полная идентичность параметров КЗ трансформатора по фазам, что существенно упрощает математические выкладки.

В [3] рассмотрена схема замещения трехфазного трансформатора со схемой соединения обмоток $Y/Y_0 - 0$. Значение также имеет трансформатор со схемой соединения обмоток $Y/Z_0 - 11$, которую следует рассмотреть. Соединение обмоток в схему звезда-зигзаг применяют, как

правило, чтобы неравномерную нагрузку вторичных обмоток трёхфазного трансформатора распределить более равномерно между фазами первичной сети и даже при неравномерной нагрузке сохранить магнитное равновесие. В данной статье обсуждается построение уравнений и расчет параметров схемы замещения такого трансформатора.

Математическая модель трёхфазного трансформатора со схемой соединения обмоток Y/Z_0 . Расчётная схема электрических цепей трехфазного трансформатора со схемой соединения обмоток Y/Z_0 базирующаяся на основе его уравнений напряжения, представлена на рис. 1.

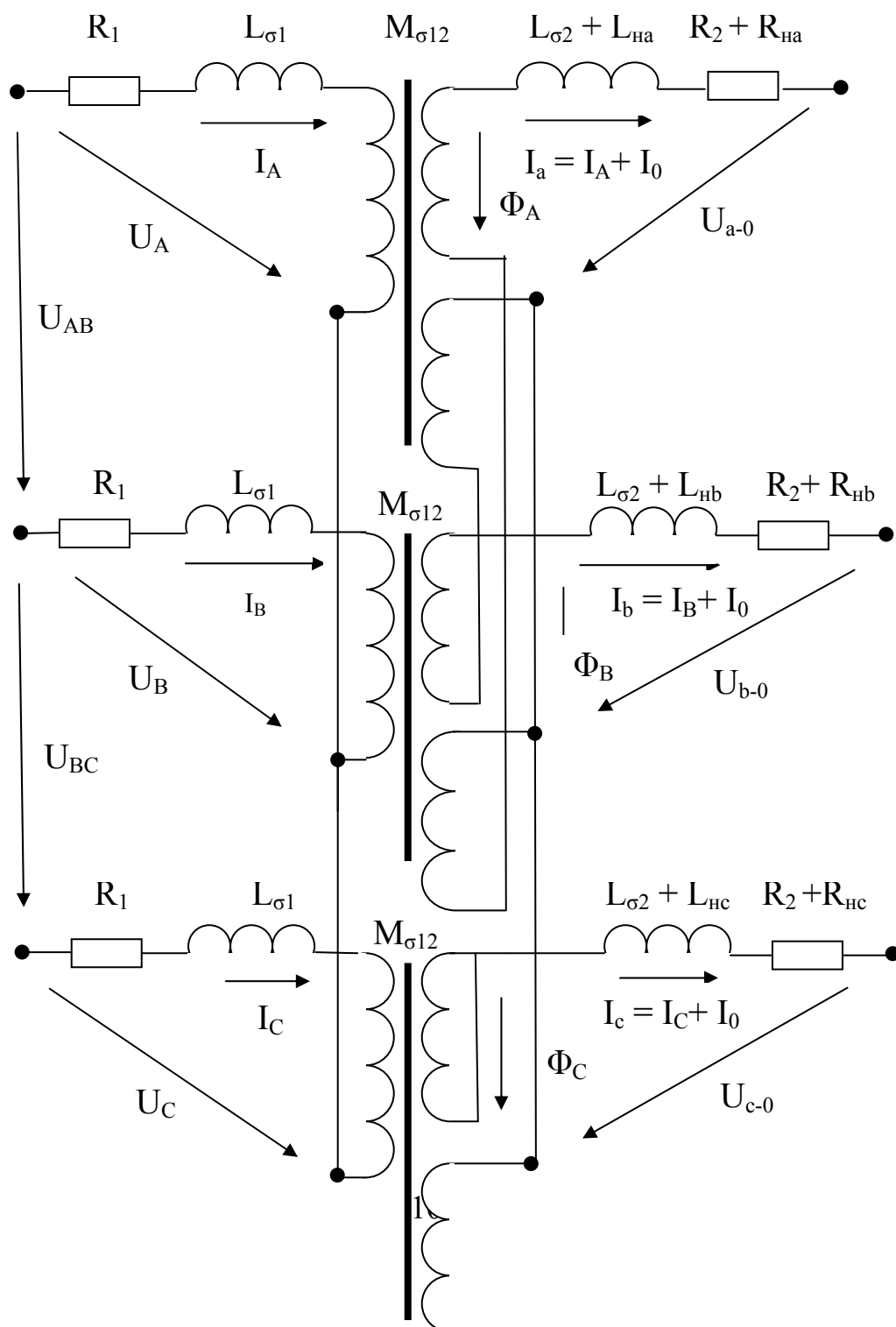


Рис. 1. Расчётная схема электрических цепей трехфазного трансформатора со схемой соединения обмоток Y/Z_0

В случае соединения одной из обмоток в зигзаг на стержне каждой фазы будут расположены три отдельные обмотки: одна первичная обмотка (Об1) и две вторичные, вторая (Об2) и третья (Об3). В стандартной схеме соединения обмоток Z_0 числа витков Об2 и Об3 полагаются одинаковыми. Электромагнитные параметры трансформатора будут приведены к числу витков Об1.

Схема замещения магнитных цепей этого трёхфазного трансформатора представлена на рис. 2. Магнитное сопротивление для потока нулевой последовательности определяется, как правило, экспериментально.

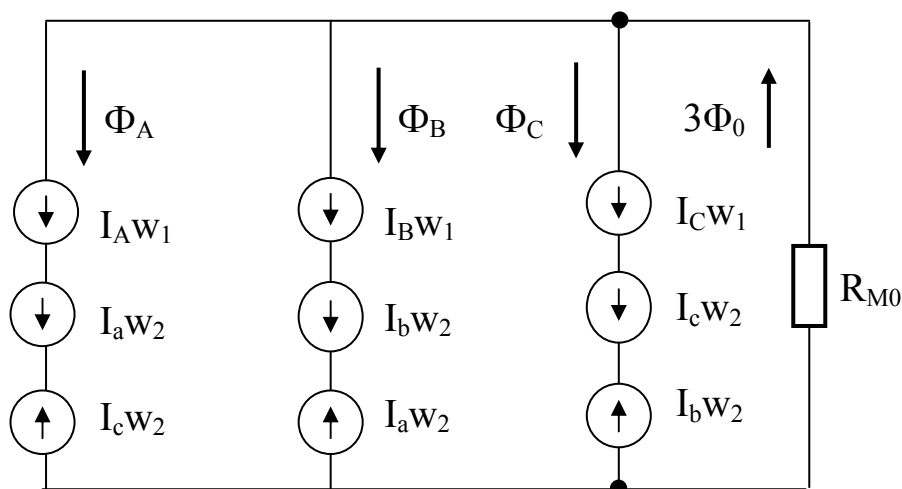


Рис. 2. Расчётная схема магнитных цепей трехфазного трансформатора со схемой соединения обмоток Y/Z_0

Математическая модель трехфазного трансформатора со схемой соединения обмоток Y/Z_0 , основанная на этих схемах, отображается следующей системой уравнений:

$$U_{AB} = Ue^{j\pi/6} = U_A - U_B;$$

$$U_{BC} = Ue^{-j\pi/2} = U_B - U_C;$$

$$\begin{aligned}
U_A &= (R_1 + j\omega w_1^2 L_{\sigma 1}) I_A - j\omega w_1 w_2 M_{\sigma 12} I_a + j\omega w_1 w_2 M_{\sigma 13} I_b + j\omega w_1 \Phi_A; \\
U_B &= (R_1 + j\omega w_1^2 L_{\sigma 1}) I_B - j\omega w_1 w_2 M_{\sigma 12} I_b + j\omega w_1 w_2 M_{\sigma 13} I_c + j\omega w_1 \Phi_B; \\
U_C &= (R_1 + j\omega w_1^2 L_{\sigma 1}) I_C - j\omega w_1 w_2 M_{\sigma 12} I_c + j\omega w_1 w_2 M_{\sigma 13} I_a + j\omega w_1 \Phi_C; \\
I_A + I_B + I_C &= 0; \\
U_{a-0} &= (R_2 + j\omega w_1^2 L_{\sigma 2} + R_3 + j\omega w_2^2 L_{\sigma 3}) I_a + j\omega w_1 \Phi_A - j\omega w_1 \Phi_B + \\
&\quad + j\omega M_{\sigma 12} I_A - j\omega M_{\sigma 13} I_B + Z_{на} I_a; \\
U_{b-0} &= (R_2 + j\omega w_1^2 L_{\sigma 2} + R_3 + j\omega w_2^2 L_{\sigma 3}) I_b + j\omega w_1 \Phi_B - j\omega w_1 \Phi_C + \\
&\quad + j\omega M_{\sigma 12} I_B - j\omega M_{\sigma 13} I_C + Z_{нб} I_b; \\
U_{c-0} &= (R_2 + j\omega w_1^2 L_{\sigma 2} + R_3 + j\omega w_2^2 L_{\sigma 3}) I_c + j\omega w_1 \Phi_C - j\omega w_1 \Phi_A + \\
&\quad + j\omega M_{\sigma 12} I_C - j\omega M_{\sigma 13} I_A + Z_{нс} I_c; \\
w_1 I_A - w_2 I_a + w_2 I_b &= (\Phi_A + \Phi_B + \Phi_C) R_{m0}; \\
w_1 I_B - w_2 I_b + w_2 I_c &= 0; \\
w_1 I_C - w_2 I_c + w_2 I_a &= 0, \tag{1}
\end{aligned}$$

где U_{AB} и U_{BC} – линейные напряжения, приложенные к цепи первичной обмотки (Об1); U_A , U_B и U_C – соответствующие фазные напряжения Об1; U_{a-0} , U_{b-0} и U_{c-0} – соответствующие фазные напряжения, индуцируемые в Об2 и Об3 фазным магнитным потоком; I_A , I_B , I_C – токи в обмотках Об1 соответствующих фаз; I_a , I_b , I_c – токи в обмотках Об2 и в Об3 соответствующих фаз; R_1 – фазное активное сопротивление Об1; R_2 – фазное активное сопротивление Об2; R_3 – фазное активное сопротивление Об3; $L_{\sigma 1}$ – геометрическая составляющая индуктивности рассеяния Об1; $L_{\sigma 2}$ – геометрическая составляющая индуктивности рассеяния Об2; $L_{\sigma 3}$ – геометрическая составляющая индуктивности рассеяния Об3; $M_{\sigma 12}$ – геометрическая составляющая взаимной индуктивности рассеяния между Об1 и Об2; $M_{\sigma 13}$ – геометрическая составляющая взаимной индуктивности рассеяния между Об1 и Об3; $M_{\sigma 23}$ – геометрическая составляющая взаимной индуктивности рассеяния между Об2 и Об3; R_{m0} – магнитное сопротивление для потока нулевой последовательности в магнитопроводе; $R_{на}$, $R_{нб}$, $R_{нс}$ – активные сопротивления нагрузки в цепях Об2 соответствующих фаз. $L_{на}$, $L_{нб}$, $L_{нс}$ – индуктивности нагрузки в цепях Об2 и Об3 соответствующих фаз; $Z_{на} = R_{на} + j\omega L_{на}$, $Z_{нб} = R_{нб} + j\omega L_{нб}$, $Z_{нс} = R_{нс} + j\omega L_{нс}$ – соответствующие полные сопротивления нагрузки.

Индексы А, В, С относятся к соответствующим фазам Об1. Индексы а, b, с относятся к соответствующим фазам Об2 или Об3. Индекс 1 относится к Об1, индекс 2 к Об2, индекс 3 к Об3.

Фазные вторичные напряжения на нагрузке рассчитываются:

$$Z_{на}I_a = (R_{на} + j\omega L_{на})I_a; \quad (2)$$

$$Z_{nb}I_b = (R_{nb} + j\omega L_{nb})I_b; \quad (3)$$

$$Z_{nc}I_c = (R_{nc} + j\omega L_{nc})I_c. \quad (4)$$

Система уравнений (1) является линейной математической моделью электромагнитных процессов, проходящих в трёхфазном трансформаторе со схемой соединения обмоток Y/Z₀. Она позволяет однозначно рассчитывать токи, линейные и фазные напряжения, магнитные потоки в магнитной системе.

Выделим в фазных токах Об2 и Об3 составляющую нулевой последовательности. Учтём то обстоятельство, что трансформируются друг в друга только составляющие токов прямой и обратной последовательности:

$$I_a = I_a' + I_0; \quad (5)$$

$$I_b = I_b' + I_0; \quad (6)$$

$$I_c = I_c' + I_0. \quad (7)$$

Выделим также в фазных магнитных потоках составляющую нулевой последовательности, которая при трёхстержневой плоской магнитной системе замыкается между верхним и нижним ярмами. Учтём, что составляющие магнитных потоков прямой и обратной последовательности замыкаются только в пределах магнитной системы. Тогда получаем

$$\Phi_A = \Phi_{(A)} + \Phi_0; \quad (8)$$

$$\Phi_B = \Phi_{(B)} + \Phi_0; \quad (9)$$

$$\Phi_C = \Phi_{(C)} + \Phi_0; \quad (10)$$

$$\Phi_{(A)} + \Phi_{(B)} + \Phi_{(C)} = 0; \quad (11)$$

$$\Phi_A + \Phi_B + \Phi_C = 3\Phi_0; \quad (12)$$

где $\Phi_{(A)}$, $\Phi_{(B)}$ и $\Phi_{(C)}$ – составляющие прямой и обратной последовательности трехфазного магнитного потока.

Заметим, что магнитные потоки наводятся токами нулевой последовательности и определяются через сопротивление нулевой

последовательности, на практике большей частью определяемое измерением.

Токи нулевой последовательности в трансформаторах со схемой соединения обмоток Y/Z_0 протекают только в обмотках, соединённых в зигзаг с нейтралью и отсутствуют в обмотках, соединённых в звезду с изолированной нейтралью. Вследствие этого они являются намагничивающими и наводят в трёхфазной магнитной системе магнитный поток нулевой последовательности:

$$(I_A - I_a) = w(I_B - I_b) = w(I_C - I_c) = wI_0 = (\Phi_A + \Phi_B + \Phi_C)R_{m0};$$

Примем во внимание следующие выражения для параметров схемы замещения трансформатора [3]. Полные сопротивления короткого замыкания между обмотками

$$Z_{к12} = R_1 + j\omega L_{\sigma 1} - 2j\omega M_{\sigma 12} + R_2 + j\omega L_{\sigma 2}; \quad (13)$$

$$Z_{к13} = R_1 + j\omega L_{\sigma 1} - 2j\omega M_{\sigma 13} + R_2 + j\omega L_{\sigma 3}; \quad (14)$$

$$Z_{к23} = R_1 + j\omega L_{\sigma 1} - 2j\omega M_{\sigma 12} + R_2 + j\omega L_{\sigma 2}. \quad (14)$$

Полные сопротивления ветвей Об1 в Т-образной схеме замещения трансформатора [3]:

$$Z_{к1} = R_1 + j\omega L_{\sigma 1} - j\omega M_{\sigma 12}; \quad (16)$$

Полные сопротивления ветвей Об2 в Т-образной схеме замещения трансформатора [3]:

$$Z_{к2} = R_2 + j\omega L_{\sigma 2} - j\omega M_{\sigma 12}; \quad (17)$$

$$I_0 w = -3\Phi_0 R_{m0}.$$

Электродвижущая сила в Об1 и Об2 от магнитных потоков нулевой последовательности:

$$j\omega w \Phi_0 = -j\omega w (I_0 w / 3R_{m0}) = -Z_{m0} I_0. \quad (18)$$

Фазное сопротивление цепи намагничивания для токов нулевой последовательности :

$$Z_{m0} = j\omega w^2 / (3R_{m0}). \quad (19)$$

Осуществим теперь некоторые преобразования системы (62), используя метод симметричных составляющих. Выделим в первичных фазных напряжениях Об1 составляющую нулевой последовательности. Учтём, что составляющие прямой и обратной последовательности напряжений, приложенных к Об1 и Об2, трансформируются друг в друга.

Систему линейных напряжений при несимметрии представим в следующем виде:

$$U_A = U_{(A)} + U_0;$$

$$U_B = U_{(B)} + U_0;$$

$$U_C = U_{(C)} + U_0,$$

где $U_{(A)}$, $U_{(B)}$, $U_{(C)}$ – составляющие прямой последовательности первичного фазного напряжения (обратная отсутствует), U_0 – составляющая нулевой последовательности первичного напряжения.

Следует отметить, что если к зажимам Об1 трансформатора приложена симметричная система линейных напряжений, то составляющие прямой и обратной последовательности фазных напряжений равны напряжениям при отсутствии несимметрии и определяются линейными межфазными напряжениями:

$$U_{(A)} = (2U_{AB} + U_{BC})/3 = U/\sqrt{3};$$

$$U_{(B)} = (-U_{AB} + U_{BC})/3 = (U/\sqrt{3})^{-j2\pi/3};$$

$$U_{(C)} = (-U_{AB} - 2U_{BC})/3 = (U/\sqrt{3})e^{j2\pi/3}.$$

Тогда систему уравнений (18) после некоторых преобразований, исключая из неё магнитные потоки, записываем следующим образом:

$$\begin{aligned} U_{(A)} + U_0 &= Z_{к12}I_A + Z_{к2}I_0 + Z_{на}(I_A + I_0); \\ U_{(B)} + U_0 &= Z_{к12}I_B + Z_{к2}I_0 + Z_{нб}(I_B + I_0); \\ U_{(C)} + U_0 &= Z_{к12}I_C + Z_{к2}I_0 + Z_{нс}(I_C + I_0); \\ U_0 &= -Z_0I_0; \\ I_A + I_B + I_C &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Далее окончательно получаем:

$$U_{AB} = Ue^{j\pi/6} = U_A - U_B;$$

$$U_{BC} = Ue^{-j\pi/2} = U_B - U_C;$$

$$U_{(A)} = (Z_{к12} + Z_{на})I_A + (Z_0 + Z_{к2A} + Z_{на})I_0; \tag{21}$$

$$U_{(B)} = (Z_{к12} + Z_{нб})I_B + (Z_0 + Z_{к2B} + Z_{нб})I_0;$$

$$U_{(C)} = (Z_{к12} + Z_{нс})I_C + (Z_0 + Z_{к2C} + Z_{нс})I_0;$$

$$I_A + I_B + I_C = 0.$$

$$I_A + I_B + I_C = 0;$$

$$\begin{aligned}
U_A &= Z_{\kappa 1} I_A - j\omega M_{\sigma 12} I_0 + j\omega w(\Phi_{(A)} + \Phi_0); \\
U_B &= Z_{\kappa 1} I_B - j\omega M_{\sigma 12} I_0 + j\omega w(\Phi_{(B)} + \Phi_0); \\
U_C &= Z_{\kappa 1} I_C - j\omega M_{\sigma 12} I_0 + j\omega w(\Phi_{(C)} + \Phi_0); \\
\Phi_{(A)} + \Phi_{(B)} + \Phi_{(C)} &= 0 .
\end{aligned}
\tag{22}$$

Система уравнений (22) позволяет проводить расчёты установившихся режимов работы трёхфазных трансформаторов.

Выводы

1. Для учёта явления электромагнитного рассеяния в уравнениях напряжения трансформатора и построения его электрической схемы предложено условно разделить магнитные потоки каждой из обмоток на магнитные потоки в стали и магнитные потоки рассеяния, что выражается условными понятиями само- и взаимоиндуктивностей рассеяния отдельных обмоток.

2. Использование условных само- и взаимоиндуктивностей рассеяния отдельных обмоток трансформатора удобно для непосредственного составления уравнений и расчёта электрических цепей, содержащих трансформатор.

3. Обоснована электрическая схема трансформатора и выведена система уравнений, адекватно описывающая электромагнитные процессы в трансформаторе, что составило методологию расчёта режимов работы трёхфазных трансформаторов при соединении обмоток по схеме Y/Z_0 .

Список литературы

1. Шакиров М.А. Вектор Пойнтинга и новая теория трансформаторов: Ч. 1 // Электричество.– 2014.– №9.– С. 52–59.
2. Шакиров М.А. Вектор Пойнтинга и новая теория трансформаторов: Ч. 2 // Электричество.– 2014.– №10.– С. 53–62.
3. Шкуропат И.А. Электрические схемы замещения трехфазных трансформаторов // Электро.– 2015.– №2.– С. 11–19.
4. Васютинский С.Б. Вопросы теории и расчета трансформаторов.– Л.: Энергия, 1970.

5. Лейтес Л.В. Электромагнитные расчеты трансформаторов и реакторов. – М.: Энергия, 1981.
6. Вольдек С.В. Электрические машины.– Л.: Энергия, 1974.

Шкуропат Игорь Анатольевич – канд. техн. наук, ЗАО ГК «Электрощит» - ТМ Самара», главный специалист по трансформаторам.
E-mail: IShkuropat@electroshield.ru

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ РАСЧЕТ МОСТОВОГО МНОГОЭЛЕМЕНТНОГО ФЕРРОЗОНДОВОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

В. С. Безкоровайный, О. В. Тарасенко, А. А. Ивженко

Использование феррозондов в дефектоскопии. При необходимости контроля дефектов типа «трещина» на большой площади использование одного феррозонда требует больших затрат времени и сложных устройств для перемещений измерительного преобразователя. В этом случае, например при контроле бандажей колес и осей подвижного состава, более эффективным измерительным преобразователем является измерительный преобразователь в виде группы феррозондов.

Дефектоскопия не является единственной областью использования феррозондов, ими могут оснащаться структуроскопы и приборы контроля магнитного поля в некотором объеме [2]. Исследования феррозондов должны позволить решить две задачи: 1) нахождение магнитной индукции в сердечниках феррозондов, индуцированной дефектом или намагниченным объектом; 2) анализ сигнала в обмотках феррозондов.

Увеличение количества феррозондов в преобразователе увеличивает количество обмоток возбуждения и выходного сигнала, что усложняет электрическую схему обмотки выходных сигналов феррозондов. Здесь предлагается способ построения измерительного преобразователя феррозондового дефектоскопа, содержащего группу полуэлементов феррозонда, или кратко: многоэлементного феррозонда (МФ).

Основой МФ является полуэлемент феррозонда, содержащий стержневой сердечник, выполненный из аморфного сплава пермаллоя с одной обмоткой. Полуэлементы феррозонда объединяются в группу, которая имеет общую обмотку. Такой принцип построения МФ с использованием трансформатора рассмотрен в [1], а в предлагаемом МФ используется мостовая схема электрической цепи. Целью статьи является построение математической модели процесса формирования сигнала в обмотке МФ, индуцированного внешним источником магнитного поля.

Принцип построения МФ. Один из вариантов конструкции МФ показан на рис. 1. Расположение элементов 1 МФ на основании 2 определяется назначением измерительного преобразователя.

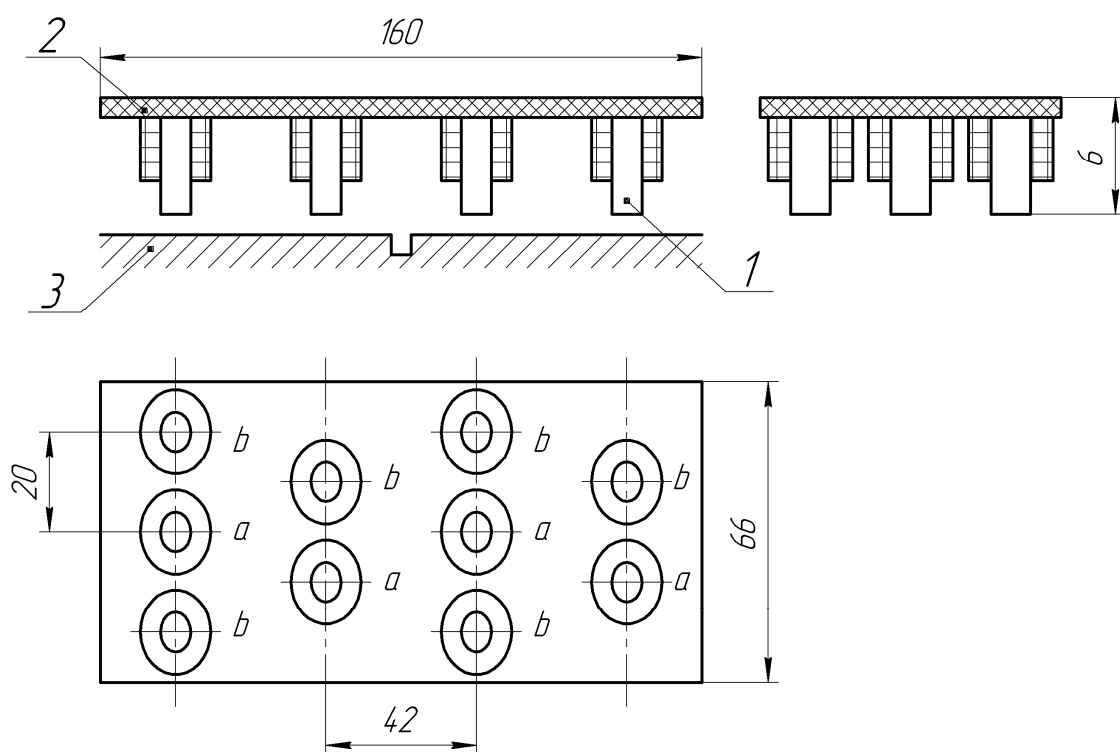


Рис. 1. Конструкция МФ.

1 – элемент МФ, 2 – основание, 3 – контролируемая деталь

Половина элементов (в данном случае 5) составляют одну ветвь электрической схемы (рис. 2), вторая половина – вторую ветвь, то есть образуется мостовая схема. Элементы одного плеча моста обозначим буквой «а», элементы второй – «b». По магнитному потоку элементы между собой не связаны, то есть, между ними нет индуктивной связи.

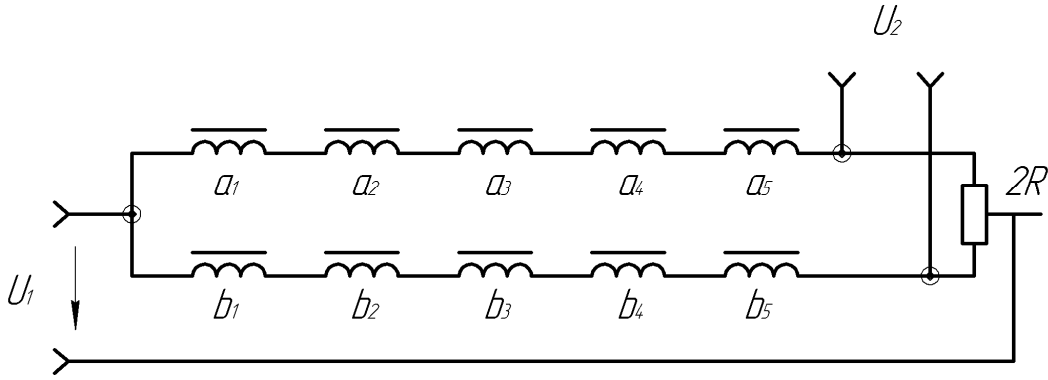


Рис. 2. Электрическая принципиальная схема

Если считать, что МФ запитывается от источника синусоидального напряжения U_1 , а сопротивление нагрузки R достаточно велико, то на основании закона Кирхгофа можно записать следующее соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{d\Psi_{na}}{dt} + Ri_a &= U_1, \\ \sum_{n=1}^N \frac{d\Psi_{nb}}{dt} + Ri_b &= U_1, \end{aligned} \quad (1)$$

где N – число элементов в одном плече МФ; $\Psi_{na,b}$ – потокосцепление элементов; $i_{a,b}$ – токи в первой и второй обмотках.

Пусть K_a и K_b элементов находятся в области измеряемого магнитного поля напряженностью H_{0k} , тогда уравнение (1) переписется так:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N-K_a} \frac{d\Psi_{na}}{dt} + \sum_{n=1}^{K_a} \frac{d\Psi_{ka}}{dt} + Ri_a &= U_1, \\ \sum_{n=1}^{N-K_b} \frac{d\Psi_{nb}}{dt} + \sum_{n=1}^{K_b} \frac{d\Psi_{kb}}{dt} + Ri_b &= U_1, \end{aligned} \quad (2)$$

Зависимость $\Psi(H)$ для сердечников элементов МФ нелинейная

$$\Psi(H) = W \cdot S \cdot B(H).$$

Здесь W – количество витков; S – площадь сечения сердечников.

Напряженность измеряемого поля H_0 много больше напряженности поля возбуждения $H_0 \ll$, поэтому можно считать, что

$$B(H) = \frac{dB}{dH} H_0 = \mu_0 \mu_o(H) H_0. \quad (3)$$

Здесь $\mu_{\delta}(H) = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH}$; H_0 – напряженность измеряемого поля; $\mu_{\delta}(H)$ – дифференциальная магнитная проницаемость сердечника элемента МФ.

Учитывая, что $\frac{dH_0}{dt} = 0$, то можно записать:

$$\frac{d\Psi}{dt} = WS \frac{dB}{dt} + WS \mu_0 \mu'_{\delta} H_0, \quad \text{где } \mu'_{\delta} = \frac{d\mu_{\delta}}{dt}.$$

Тогда система уравнений (3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N-K_a} WS \frac{dB_{na}}{dt} + \sum_{k=1}^{K_a} WS \frac{dB_{na}}{dt} \pm \sum_{k=1}^{K_a} WS \mu_0 \mu'_{\delta} H_{0ka} + Ri_a &= U_1; \\ \sum_{n=1}^{N-K_b} WS \frac{dB_{nb}}{dt} + \sum_{k=1}^{K_b} WS \frac{dB_{nb}}{dt} \pm \sum_{k=1}^{K_b} WS \mu_0 \mu'_{\delta} H_{0kb} + Ri_b &= U_1 \end{aligned} \quad (5)$$

или

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N L_0 \frac{d}{dt} (\mu_{\delta} i_a) \pm \sum_{k=1}^{K_a} WS \mu_0 \mu'_{\delta} H_{0ka} + Ri_a &= U_1; \\ \sum_{n=1}^N L_0 \frac{d}{dt} (\mu_{\delta} i_b) \pm \sum_{k=1}^{K_b} WS \mu_0 \mu'_{\delta} H_{0kb} + Ri_b &= U_1, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$L_0 = \frac{W^2 S \mu_0}{l}. \quad l \text{ – длина сердечников элементом МФ.}$$

Можно считать, что $i_a \approx i_b$, тогда выходное напряжение МФ может быть рассчитано по формуле:

$$U_2 = \mu_0 \mu'_{\delta} WS \left(\pm \sum_{k=1}^{K_a} H_{0ka} \pm \sum_{k=1}^{K_b} H_{0kb} \right) \quad (7)$$

Таким образом, напряжение выходного сигнала МФ прямо пропорционально алгебраической сумме напряженностей магнитного поля в сердечниках МФ индуцированных дефектом или намагниченными ферромагнитными телами.

Зависимость $B(H)$ аппроксимируется кусочно-ломаной линией

$$B(H) = \begin{cases} \mu_0 \mu H \text{ при } |H| \leq |H_s|; \\ \mu \mu_s H \text{ при } |H| > |H_s|; \end{cases}$$

H_s – напряженность магнитного поля насыщения.

При этом μ при $|H| \leq |H_s|$;
 $\mu(H) = \mu_s$ при $|H| \leq |H_s|$.

Если напряженность магнитного поля возбуждения в сердечниках элементов МФ изменяется как $H(t) = H_m \sin \omega t$, то $\mu_g(t)$ представляет собой последовательность однополярных прямоугольных интервалов, которые можно разложить в ряд Фурье

$$\mu_g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t, \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

при этом

$$a_0 = \frac{2}{\pi}(\mu - \mu_s)\Theta + \mu_s;$$

$$a_n = \frac{4}{\pi n}(\mu - \mu_s) \sin \Theta;$$

$$\Theta = \arcsin \frac{H_s}{H_m}.$$

Для второй гармоники справедливо $a_2 = \frac{2}{\pi}(\mu - \mu_s) \frac{H_s}{H_m}$;

Выходной сигнал МФ является второй гармоникой напряжения возбуждения, поэтому

$$\mu_g(t) = \frac{2}{\pi}(\mu - \mu_s) \frac{H_s}{H_m} \cos 2\omega t,$$

тогда выходное напряжение определяется формулой

$$u_2(t) = \mu_0 WS \frac{4}{\pi}(\mu - \mu_s) \omega \left(\pm \sum_{k=1}^{K_a} H_{0ka} \pm \sum_{k=1}^{K_b} H_{0kb} \right) \sin 2\Theta \cos 2\omega$$

$$\sin 2\Theta = 2 \frac{H_s}{H_m} \sqrt{1 - \frac{H_s^2}{H_m^2}}.$$

Обычно [3] выбирается $H_m = \sqrt{2}H_s$.

Сопrotивление одной ветви МФ составляет $Z = \sqrt{R^2 + (\omega LN)^2}$,

где $L = \frac{\mu\mu_0 SW^2}{l}$ – индуктивность одного элемента.

Амплитуда напряженности поля возбуждения рассчитывается по следующей формуле

$$H_m = \frac{U_m l}{ZW}. \quad (8)$$

Таким образом, напряжение возбуждения выбирается равным

$$U_m = \sqrt{R^2 + \omega^2 N^2 L^2} \cdot \frac{\sqrt{2} H_s l}{W}. \quad (9)$$

Расчет напряженности магнитного поля в сердечниках элементов МФ индуцированного дефектом. Объектом является или дефект в ферромагнитном металле или ферромагнитное тело. Для расчета напряженности магнитного поля в сердечниках феррозонда, индуцированного дефектом или намагниченным объемом металла, необходимо рассчитать поле вектора намагниченности в объекте. Напряженность магнитного поля в сердечниках элементов МФ определяется на основе принципа взаимности [3]:

$$\bar{H} = \frac{1}{M_\phi V_\phi} \oint_S \Phi_\phi M_n dS, \quad (10)$$

где Φ_ϕ – магнитный скалярный потенциал, создаваемый сердечником элемента с расположенной на нем обмоткой с током; M_ϕ – намагниченность сердечника; M_n – нормальная составляющая вектора намагниченности на поверхности ферромагнитного тела.

Величина скалярного магнитного потенциала, создаваемого обмоткой с током iw на сердечнике с прямоугольным сечением элемента МФ:

$$\Phi_\phi = \frac{\mu_\phi iw b}{2\pi c} \left[\ln \frac{x-a + \sqrt{(x-a)^2 + (y-0,15b)^2 + (z-c)^2}}{x+a + \sqrt{(x+a)^2 + (y-0,15b)^2 + (z-c)^2}} - \ln \frac{x-a + \sqrt{(x-a)^2 + (y-0,15b)^2 + (z+c)^2}}{x+a + \sqrt{(x+a)^2 + (y-0,15b)^2 + (z+c)^2}} \right]. \quad (11)$$

Здесь iw – ток в катушке с количеством витков w ; μ_ϕ – относительная магнитная проницаемость сердечника элемента многоэлементного феррозонда, $\mu_\phi = \frac{m\mu}{m + \mu + a}$, μ – относительная магнитная проницаемость, m – проницаемость формы; $2a, 2b$ – размеры площади сечения сердечника; $2c$ – длина сердечника; координата z совпадает с длиной

сердечника $2c$; x, y, z – координаты точки наблюдения при расположении геометрического центра сердечника в начале координат.

В первом приближении полагается, что потенциал Φ_ϕ создается торцами сердечника элемента с намагниченностью

$$M_\phi = \frac{i\omega\mu_\phi}{2c}. \quad (12)$$

В силу зависимости (10) нормальная составляющая вектора намагниченности (12) имеется только на боковых стенках дефекта площадью $4a_\delta \cdot c_\delta$, причем M_n является постоянной величиной на обеих стенках дефекта. Коэффициенты геометрического центра дефекта $x_\delta, y_\delta, z_\delta$.

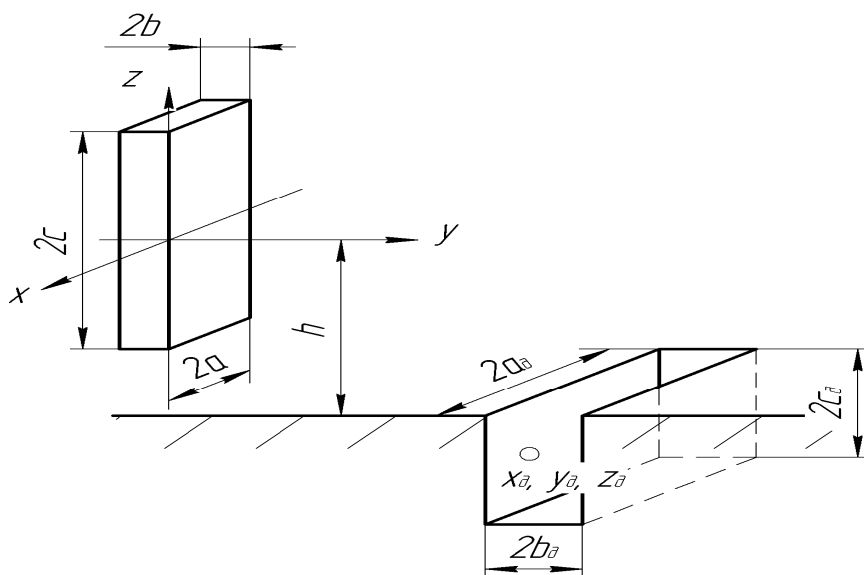


Рис. 3. К расчету напряженности магнитного поля, индуцированного дефектом

Тогда, согласно (10), напряженность магнитного поля в сердечнике элемента МФ, индуцированного дефектом, находится по формуле [4]

$$\begin{aligned}
H_0 = & \frac{M_n a_\delta \cdot c_\delta}{4a \cdot c} \int_{-c_\delta}^{c_\delta} \int_{-a_\delta}^{a_\delta} \left[\ln \frac{x' - a + \sqrt{(x' - a)^2 + (y_\delta - 0,15b - b_\delta)^2 + (h - c + z')^2}}{x' + a + \sqrt{(x' + a)^2 + (y_\delta - 0,15b - b_\delta)^2 + (h - c + z')^2}} - \right. \\
& - \ln \frac{x' - a + \sqrt{(x' - a)^2 + (y_\delta - 0,15b - b_\delta)^2 + (h + c + z')^2}}{x' + a + \sqrt{(x' + a)^2 + (y_\delta - 0,15b - b_\delta)^2 + (h + c + z')^2}} - \\
& - \ln \frac{x' - a + \sqrt{(x' - a)^2 + (y_\delta - 0,15b + b_\delta)^2 + (h - c + z')^2}}{x' + a + \sqrt{(x' + a)^2 + (y_\delta - 0,15b + b_\delta)^2 + (h - c + z')^2}} - \\
& \left. - \ln \frac{x' - a + \sqrt{(x' - a)^2 + (y_\delta - 0,15b + b_\delta)^2 + (h + c + z')^2}}{x' + a + \sqrt{(x' + a)^2 + (y_\delta - 0,15b + b_\delta)^2 + (h + c + z')^2}} \right] dx' dz'. \\
& x' = x - x_\delta, \quad z' = z - z_\delta.
\end{aligned} \tag{13}$$

Если определяется магнитное поле в сердечнике элемента МФ, индуцированное намагниченным ферромагнитным телом или частицей, то задается значение нормальной составляющей намагниченности M_n .

Формулы (7) и (13) дают возможность рассчитать амплитуду выходного сигнала МФ на этапах формирования сигнала, то есть найти зависимость амплитуды второй гармоники выходного сигнала МФ при различных параметрах дефектов и их расположениях.

Численные расчеты и натурные эксперименты проводились для элементов МФ с параметрами: $2a = 2\text{мм}$, $2b = 0,05\text{мм}$, $2c = 6\text{мм}$, $W = 150$. Размеры дефекта $2a_\delta = 12\text{мм}$, $2b_\delta = 0,2\text{мм}$, $2c_\delta = 6\text{мм}$. Расчетное значение выходного сигнала $U_{2m} = 0,121\text{В}$. экспериментальное – $U_{2m} = 0,11\text{В}$.

Вывод. Предложен мостовой принцип построения многоэлементного феррозондового преобразователя, определена его функция преобразования и напряженность магнитного поля, индуцированного дефектом или ферромагнитным телом, в сердечниках элементов.

Список литературы

1. Быльченко Ф.С., Васильев В.И., Гуменюк Б.В. Обнаружение феррочастиц в оболочках тепловыделяющих элементов атомных реакторов // Дефектоскопия. – 1980. – №5. – С. 19–21.

2. Загидулин В.В., Мужичкий В.Ф., Курозаев В.П. О разрешении дефектов сплошности по топографии магнитного поля // Дефектоскопия.– 2000.– №5.– С. 45–58.

3. Яковенко В.В., Корбан Н.П., Швец С.Н. Расчет магнитного поля, индуцированного остаточной намагниченностью ферромагнитной детали // Методы та прилади контролю яеості. – 2008,– №20.– С. 3–6.

4. Корбан Н.П., Букреев В.В., Яковенко В.В. Математическое моделирование магнитометрического тракта феррозондового дефектоскопа // Вісник СНУ ім. В. Даля. – 2008.– №8.– С. 332–335.

Безкорвайный Владимир Сергеевич – канд. техн. наук, доцент кафедры электромеханики. Луганский национальный университет им. В. Даля. Луганск, ЛНР. E-mail: kaf-el-mex@yandex.ru.

Тарасенко Олег Владимирович – канд. техн. наук, доцент, декан Факультета электротехнических систем. Луганский национальный университет им. В. Даля. Луганск, ЛНР. E-mail: ovtar1966@yandex.ua.

Ивженко Анастасия Александровна – аспирант Луганского национального университета им В. Даля. Луганск, ЛНР. E-mail: stasya.ivgenko@mail.ru.

СХЕМНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РЕКУПЕРАЦИИ В ГОРОДСКОМ ЭЛЕКТРОТРАНСПОРТЕ

Л. Н. Канов, А. В. Солодкий

Предложена методика построения схемной модели движения группы транспортных средств для оценки эффективности использования энергии рекуперации. Показано, что применение гиомоторных рекуператоров на электротранспорте в городских условиях частых спусков и подъемов позволяет накапливать значительную электроэнергию при движении транспортных средств под уклон, которая далее может быть использована при трогании с места и разгоне, а также при движении на подъем.

The method of construction of scheme model of motion of group of transport vehicles is offered for the estimation of efficiency of the use of energy

of recuperation. It is show that application of giromotor recuperators on electrotransport in the city terms of the frequent descents and ascents allows to accumulate considerable electric power at motion of transport vehicles down grade, which further can be used for touching from a place and acceleration, and also at motion up grade.

Введение. В городском электротранспорте (троллейбусы, трамваи) все большее применение находят тяговые частотно – регулируемые электроприводы переменного тока, которые вытесняют приводы постоянного тока. Асинхронные короткозамкнутые двигатели обладают повышенной надежностью, меньшей стоимостью, простотой конструкции. Применение тягового асинхронного электропривода решает не только технические задачи, но и вопросы энергосбережения [1, 2] за счет использования рекуперации электроэнергии. Проблема рекуперации в городском электротранспорте в условиях пересеченной местности является актуальной, так как при движении под уклон напряжение на контактной сети повышается на 15 –20%, и возвращаемая энергия гасится в блоках тормозных сопротивлений. Эта проблема описана для электроприводов постоянного тока, в то же время для асинхронных электроприводов она исследована недостаточно [3].

Для передачи энергии рекуперации в питающую сеть применяются инверторные агрегаты, работающие как в выпрямительном, так и в инверторном режиме [4, 5]. Так как количество возвращаемой электроэнергии сравнительно невелико, установка подобных агрегатов экономически мало оправдана. Поэтому целесообразно накопление энергии рекуперации непосредственно в движущемся электротранспорте и в контактной сети, где энергия может сохраняться в аккумуляторах или ионисторах. Более предпочтительным является использование гиromоторных рекуператоров, которые накапливают избыточную электроэнергию в механической форме. Ротор гиromотора раскручивается за счет избыточной электроэнергии до большой скорости. Эта энергия затем используется при трогании с места и разгоне транспортного средства.

Целью статьи является моделирование движения группы транспортных средств (троллейбусов) под уклон и оценка возможности накопления энергии рекуперации для повышения энергоэффективности городского электротранспорта. Для оценки возможности накопления энергии рекуперации рассматривается гириомотор с массивным ротором – маховиком диаметром до одного метра и весом 60 – 70 кг. Момент инерции такого маховика оценивается в $10 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Моделирование процесса рекуперации выполняется для группы из трех троллейбусов по одной линии под уклон, когда к платформам прикладывается дополнительная сила, а приводной асинхронный двигатель получает дополнительный вращающий момент.

Математическое описание системы. На рис.1 изображена упрощенная схема контактной линии с тремя троллейбусами. На схеме обозначены: E – источник постоянного напряжения питающей подстанции, r_E, L_0 – сопротивление и индуктивность обмотки подстанции, r_1, r_2, r_3 – сопротивления контактных проводов между троллейбусами. На основании принципа электромеханической аналогии [6] вращающиеся рекуператоры на троллейбусах имитируются конденсаторами C_1, C_2, C_3 соответствующей емкости (до 10 Ф) и зарядными резисторами r_{c1}, r_{c2}, r_{c3} . Через C_0, r_0 обозначен большой рекуператор на питающей подстанции (емкость до 15 Ф).

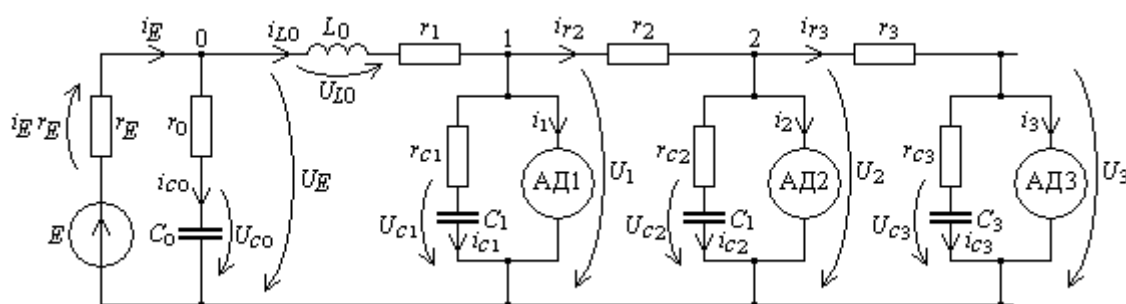


Рис.1. Упрощенная схема дистанции

Асинхронный двигатель соединен с контактной линией через реверсивный инверторный преобразователь, позволяющий обмениваться энергией с линией в обоих направлениях. Для его описания применены дифференциальные уравнения во вращающихся dq – координатах относительно проекций токов при общепринятых допущениях: не

учитываются потери в стали машин и высшие гармоники магнитного поля, трехфазная система напряжений инвертора полагается симметричной.

В этих условиях получаем [4, 5]

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_{0d}(i_{0d})}{di_{0d}} \frac{di_{0d}}{dt} + L_{1\sigma} \frac{di_{1d}}{dt} &= u_{1d} + \omega_0 \cdot (\psi_{0q}(i_{0q}) + L_{1\sigma} i_{1q}) - r_1 i_{1d}; \\ \frac{d\psi_{0q}(i_{0q})}{di_{0q}} \frac{di_{0q}}{dt} + L_{1\sigma} \frac{di_{1q}}{dt} &= u_{1q} - \omega_0 \cdot (\psi_{0d}(i_{0d}) + L_{1\sigma} i_{1d}) - r_1 i_{1q}; \\ \frac{d\psi_{0d}(i_{0d})}{di_{0d}} \frac{di_{0d}}{dt} + L_{2\sigma} \frac{di_{2d}}{dt} &= (\omega_0 - p\Omega) \cdot (\psi_{0q}(i_{0q}) + L_{2\sigma} i_{2q}) - r_2 i_{2d}; \\ \frac{d\psi_{0q}(i_{0q})}{di_{0q}} \frac{di_{0q}}{dt} + L_{2\sigma} \frac{di_{2q}}{dt} &= -(\omega_0 - p\Omega) \cdot (\psi_{0d}(i_{0d}) + L_{2\sigma} i_{2d}) - r_2 i_{2q}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Механическое движение описывается уравнением

$$J \frac{d\Omega}{dt} + M_n + M_p = M_{AD}. \quad (2)$$

В этих уравнениях $i_{1d}, i_{1q}, i_{2d}, i_{2q}, u_{1d}, u_{1q}$ – продольные и поперечные проекции токов и напряжения статора и ротора двигателя на координатные оси dq , $\Psi_{0d} = \Psi_{0d}(i_{0d})$, $\Psi_{0q} = \Psi_{0q}(i_{0q})$ – составляющие магнитных потоков сцеплений вдоль этих осей, $i_{0d} = i_{1d} + i_{2d}$, $i_{0q} = i_{1q} + i_{2q}$.

Насыщение магнитной цепи аппроксимировано гладкой функцией потоков сцеплений от токов, производные от этих функций далее обозначены штрихом. В уравнениях (1), (2): $L_{1\sigma}, L_{2\sigma}$ – индуктивности рассеяния статора и ротора, ω_0 – угловая частота напряжения статора, $\omega_p = \omega_0 - p\Omega$ – частота тока ротора, Ω – угловая скорость вращения ротора, p – число пар полюсов, r_1, r_2 – сопротивления обмоток статора и ротора, J – приведенный к ротору момент инерции, $M_n = k_n \Omega + k_m m$ – момент сопротивления нагрузки, m – масса транспортного средства, M_p – момент, возникающий от угла наклона полотна пути, $M_{AD} = 1,5p \cdot ((\psi_{0d}(i_{0d}) + L_{1\sigma} i_{1d}) \cdot i_{1q} - (\psi_{0q}(i_{0q}) + L_{1\sigma} i_{1q}) \cdot i_{1d})$ – вращающий момент двигателя.

Схемная модель системы. Из рис.1 следует, что в целом рассматриваемая система описывается большим количеством нелинейных

алгебраических и дифференциальных уравнений. Для удобства анализа применим схемное моделирование [7]. Параллельная схемная модель асинхронного двигателя в соответствии с уравнениями (1), (2) изображена на рис.2. Особенностью ее является замена всех элементов и параметров на противоположные по значениям: токов и напряжений – на напряжения и токи, сопротивлений – на проводимости, индуктивностей и емкостей – на емкости и индуктивности. Это приводит к значительному сокращению узлов полученной модели и облегчению ее численного моделирования [7].

На рис.2 обозначены: проводимости, численно равные сопротивлениям $g_1 = r_1$, $g_2 = r_2$, $g_3 = r_3$, $g_4 = r_4$, $g_5 = k_n$; нелинейные емкости $C_1 = L_{1\sigma} + \Psi'_{0d}$, $C_2 = L_{1\sigma} + \Psi'_{0q}$, $C_3 = L_{2\sigma} + \Psi'_{0d}$, $C_4 = L_{2\sigma} + \Psi'_{0q}$, C_5 численно равна моменту инерции J ; источники тока, управляемые напряжениями: $J_1 = \omega_0 \Psi_{0q}$, $J_2 = \omega_0 L_{1\sigma} i_{1q}$, $J_4 = \omega_0 \Psi_{0d}$, $J_5 = \omega_0 L_{1\sigma} i_{1d}$, $J_7 = \omega_p \Psi_{0q}$, $J_8 = \omega_p L_{2\sigma} i_{2q}$, $J_{10} = \omega_p \Psi_{0d}$, $J_{11} = \omega_p L_{2\sigma} i_{1d}$, $J_{15} = M_{АД}$; источники тока, управляемые токами: $J_3 = \Psi'_{0d} \frac{di_{2d}}{dt}$, $J_6 = \Psi'_{0q} \frac{di_{2q}}{dt}$, $J_9 = \Psi'_{0d} \frac{di_{1d}}{dt}$, $J_{12} = \Psi'_{0q} \frac{di_{1q}}{dt}$; независимые источники тока: $J_{13} = u_{1d}$, полагаем $u_{1q} = 0$, $J_{14} = M_p$, $J_{16} = M_n$.

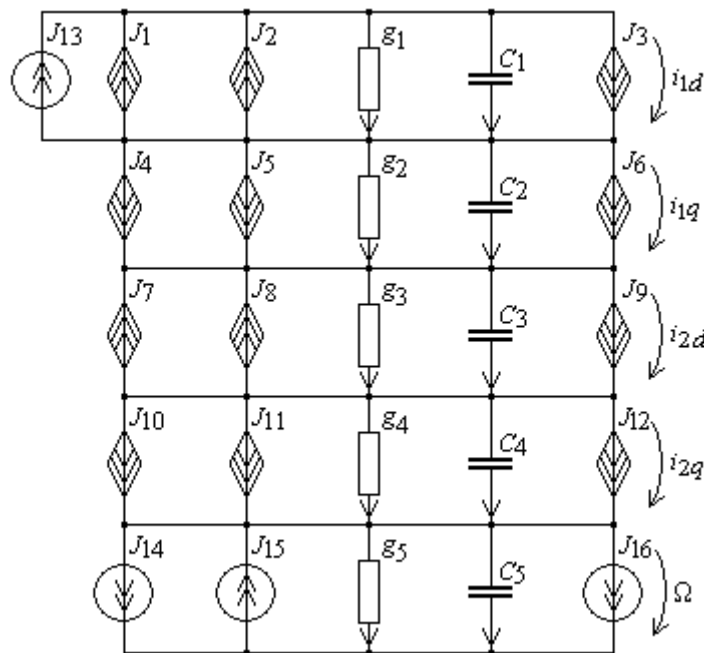


Рис.2. Параллельная схемная модель асинхронного двигателя

Для стыковки схемных моделей двигателей троллейбусов со схемой дистанции на рис.1 последнюю также представим в инверсной форме. Полученная таким образом схемная модель изображена на рис.3, где три электродвигателя замещаются по рис.2.

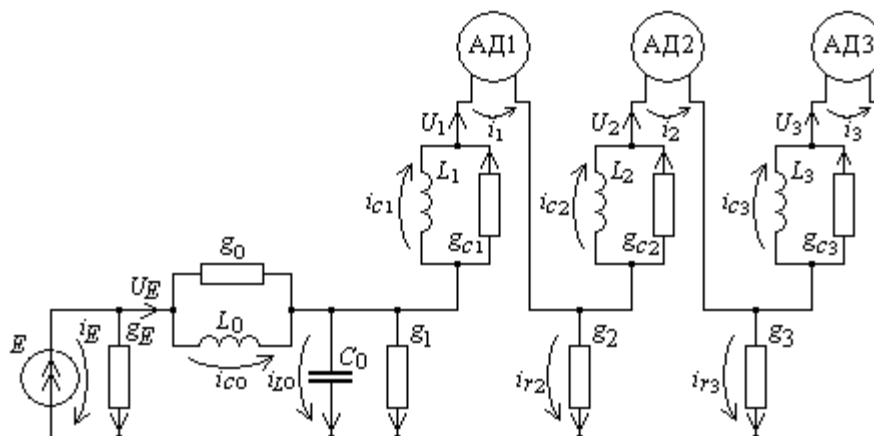


Рис. 3. Схемная модель дистанции

На рис.3 обозначены проводимости, численно равные сопротивлениям: $g_E = r_E$, $g_0 = r_0$, $g_1 = r_1$, $g_{c1} = r_{c1}$, $g_2 = r_2$, $g_{c2} = r_{c2}$, $g_3 = r_3$, $g_{c3} = r_{c3}$; индуктивности, численно равные емкостям, имитирующим роторы гиromоторов: $L_0 = C_0$, $L_1 = C_1$, $L_2 = C_2$, $L_3 = C_3$; далее $C_0 = L_0$; независимый источник тока численно равен источнику ЭДС E .

Результаты моделирования. Построенная схемная модель рассчитывается существующим программным обеспечением для моделирования электрических цепей (типа *EWB*). Моделирование осуществлялось при $\omega_0 = 314 \text{ с}^{-1}$ для асинхронного двигателя мощностью 180 кВт с типичными параметрами: $r_1 = 0,085 \text{ Ом}$; $r_2 = 0,099 \text{ Ом}$; $L_{\sigma 1} = L_{\sigma 2} = 0,477 \text{ мГн}$; $p = 2$; $m = 15 \cdot 10^3 \text{ кг}$; $M_{\text{АД ном}} = 1150 \text{ Н}\cdot\text{м}$; $\Omega_{\text{ном}} = 153,45 \text{ с}^{-1}$; $J = 118 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; $k_n = 6,6$; $k_m = 0,01$; $U_{\text{ном}} = 560 \text{ В}$; $I_{\text{ном}} = 171 \text{ А}$. Напряжение питания линии $E = 570 \text{ В}$; $r_E = 0,035 \text{ Ом}$; коэффициент передачи редуктора 5,64; радиус колеса 0,5 м; скольжение $S_{\text{ном}} = 0,023$. При движении под уклон с углом 10^0 на платформу действует дополнительная сила, а на двигатель – ускоряющий момент $M_p = 2,7 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Троллейбусы поочередно въезжают на спуск в моменты $t_1 = 0,5 \text{ с}$; $t_2 = 1,5 \text{ с}$; $t_3 = 2,5 \text{ с}$. Продолжительность езды под уклон составляет 7 с. Сопротивление

контактных проводов между троллейбусами: $r_1(t) = 0,05 + 2 \cdot 10^{-4}t$ Ом; $r_2 = 0,024$ Ом; $r_3 = 0,02$ Ом. В стационарном движении без уклона скорости вращения двигателей составили по 153 с^{-1} (50 км/час); ток в линии $i_{L0} = 516$ А; напряжения на точках контактов: $U_1 = 550$ В; $U_2 = 540$ В; $U_3 = 538$ В; $U_0 = 570$ В.

На рис.4,а – в изображены графики движения группы троллейбусов в условиях отсутствия рекуператоров. Рисунок показывает, что сразу после того, как первый троллейбус начинает спуск, его двигатель переходит в режим рекуперации, скорость его вращения становится больше, чем синхронная. Вследствие этого напряжение на линии увеличивается. После въезда на спуск третьего троллейбуса потенциалы точек линии превышают питающее напряжение (рис. 4,б): $U_1 = 609$ В; $U_2 = 618$ В; $U_3 = 621$ В; $U_0 = 585$ В. Скорость троллейбусов незначительно возрастает, ток в линии меняет направление. На рис.4,в показаны графики вырабатываемой энергии рекуперации трех двигателей и энергии, передаваемой на подстанцию.

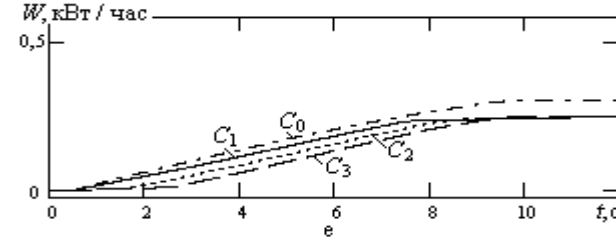
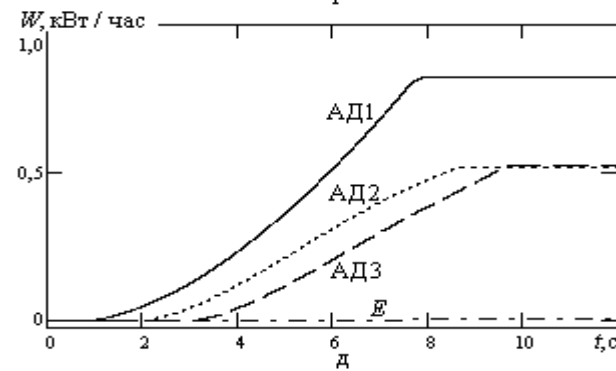
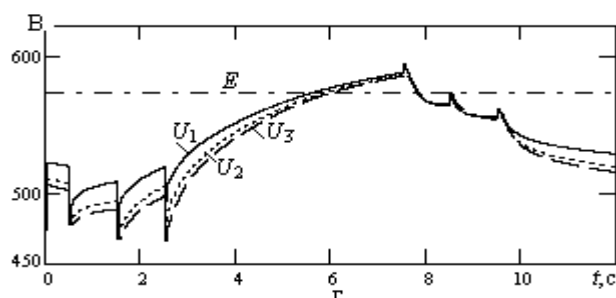
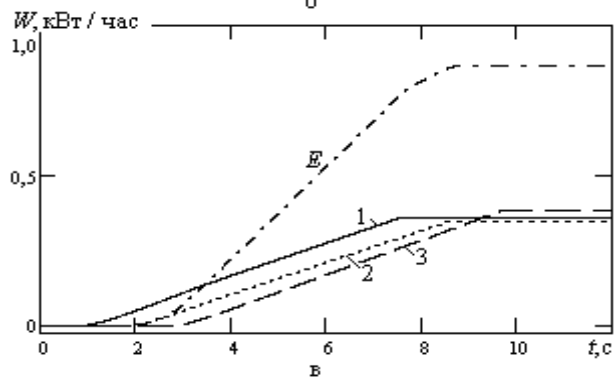
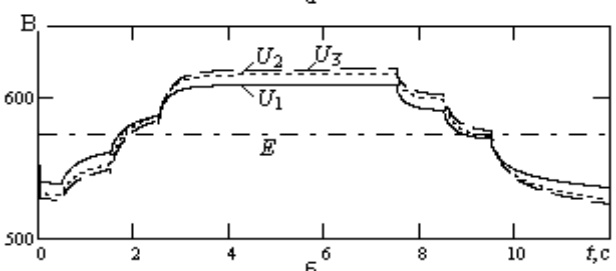
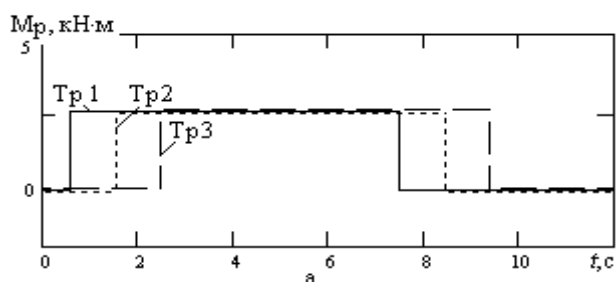


Рис.4. Движение транспортных средств в условиях отсутствия рекуперации а - в); движение транспортных средств при наличии рекуперации г - е)

На рис.4, г–е изображены графики движения тех же троллейбусов, оснащенных гиromоторными рекуператорами, а также с большим рекуператором, установленным вблизи подстанции. Начальные напряжения на емкостях, имитирующих роторы гиromоторов (токи в индуктивностях на рис.3), приняты по 250 В; $U_{C_0} = 350$ В, что соответствует угловой скорости предварительно раскрученных гиromоторов.

Рис.4,г показывает, что за время спуска конденсаторы (рис.1) зарядились до 458 В, а конденсатор C_0 – до 500 В. Значительного превышения напряжения на линии в этом случае не происходит. Второй и третий двигатели за время спуска выработали по 0,52 кВт/ч электроэнергии, а первый – 0,82 кВт/ч. Общая энергия, выработанная тремя двигателями передается заряжающимся конденсаторам (по 0,25 кВт/ч; емкость C_0 накапливает 0,306 кВт/ч. В линию возвращается 0,02 кВт/ч. Часть энергии рекуперации расходуется на нагрев сопротивлений.

Выводы: 1. Построенная схемная модель позволила выполнить анализ процесса рекуперации электроэнергии в сложной системе электроприводов транспортных средств в условиях движения по пересеченной местности. 2. Массивные рекуператоры, установленные на транспортных средствах, снимают остроту проблемы перенапряжения в линии при движении городского электротранспорта под уклон на длинных спусках. 3. Рассчитанных емкостей оказалось достаточно для накопления всей энергии рекуперации. Излишек ее передается на питающую подстанцию и далее через инвертор в силовую сеть.

Список литературы

1. Онищенко Г.Б. Электропривод. – М.: Изд. центр «Академия», 2008. – 208 с.
2. Чиликин М.Г., Сандлер А.С. Общий курс электропривода. – М.: Энергоатомиздат, 1982. – 575 с.

3. Петров Б.П., Степанов А.Д. Управление электрическим подвижным составом. – М.– Л.: Гос. энергетич. изд-во, 1956. – 304 с.

4. Браславский И.Я., Ишматов З.Ш., Поляков В.Н. Энергосберегающий асинхронный электропривод. – М.: Изд. центр «Академия», 2004. – 256 с.

5. Соколовский Г.Г. Электроприводы переменного тока с частотным регулированием. – М.: Изд. центр «Академия», 2006. – 272 с.

6. Ленк А. Электромеханические системы. – М.: Мир, 1978. – 283 с.

7. Канов Л.Н. Оптимизация режимов асинхронных электроприводов на основе схемного моделирования // Оптимизация производственных процессов: сб. науч. тр. – Севастополь, 2009. – Вып.11. – С.119–123.

Канов Лев Николаевич – канд. техн. наук, доцент кафедры Судового электрооборудования Севастопольского государственного университета. 299053, Севастополь, ул. Университетская, 33, ауд. А302. E-mail: lkanov48@mail.ru

Солодкий Антон Васильевич – аспирант кафедры Судового электрооборудования Севастопольского государственного университета.

РАСЧЁТ ТОКОВ КОРОТКОГО ЗАМЫКАНИЯ В РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫХ СЕТЯХ 0,38–35 КВ МЕТОДОМ БАЗОВОГО ЭЛЕМЕНТА

Д. С. Александров, А. С. Калашников

Предложен графический метод для расчета токов наиболее распространенных видов короткого замыкания в распределительных сетях 0,38–35 кВ. Позволяет заменить аналитические методы расчета короткого замыкания при проведении испытательных, монтажных, и эксплуатационных работ на электроустановках.

A graphical method for calculating the currents of the most common types of short-circuit in distribution networks of 0.38–35 kV is proposed. Allows to replace analytical methods of calculation of short circuit during testing, installation, and maintenance work on electrical installations.

О расчете тока короткого замыкания. Получение начального представления о переходных процессах в электрических сетях, проектирование электрических сетей, эксплуатация электрооборудования и электроустановок требуют расчётов токов короткого замыкания (КЗ).

Наиболее массовыми сетями являются распределительные сети с номинальным напряжением $U_n = 0,38\text{--}35$ кВ. Для таких сетей характерны: неизменность напряжения на шинах источника питания; простая последовательная структура схемы; преобладание активного сопротивления над индуктивным сопротивлением элементов сети, что позволяет пренебречь взаимной индуктивностью между фазами электрической цепи, между фазами и нулевым проводником.

Перечисленные особенности распределительных сетей с номинальным напряжением $U_n = 0,38\text{--}35$ кВ позволяют реализовать требования, которым должен удовлетворять метод расчёта тока КЗ. В подавляющем большинстве случаев не требуется большая точность рассчитанных значений токов КЗ (менее $\pm 10\%$). Это связано со ступенчатым характером изменения номинальных параметров электрооборудования и сравнением с контрольным нормативом тока КЗ.

Предметом данной статьи является разработка удобного, наглядного и производительного экспресс-метода расчёта токов КЗ без применения средств расчёта и не требующего высокой квалификации.

Методы нахождения токов короткого замыкания. Существуют две основные группы методов определения значений токов КЗ – аналитические и графические [1–19]. Графические методы расчёта представляют собой наглядную форму реализации аналитических методов расчёта. Поэтому далее рассмотрим основные методы аналитического расчёта токов КЗ, которые могут быть запрограммированы [20–22].

Рассмотрим аналитические методы расчёта в части основных принципов. Универсальные аналитические методы расчёта токов КЗ предназначены для расчёта всех основных видов КЗ: $K^{(3)}$ – трёхфазных замыканий электрической цепи, $K^{(2)}$ – двухфазных замыканий электрической цепи и $K^{(1)}$ – однофазных замыканий электрической цепи.

Специализированные аналитические методы предназначены в основном для расчёта однофазных КЗ – $K^{(1)}$.

Другая особенность методов расчёта токов КЗ заключается в уровне точности результатов расчёта. В практике расчётного нахождения значения токов КЗ применяются как точные методы (погрешность менее 10%), так и приближенные методы (погрешность равна и более 10%).

Среди точных и универсальных методов расчёта [1–4, 12–16, 19] известны: метод электрической цепи и метод симметричных составляющих, которые основаны на выражениях для нахождения действующего значения периодической составляющей тока КЗ.

Трёхфазное КЗ электрической цепи – $K^{(3)}$. Значение тока КЗ $I_{\text{к}}^{(3)}$ определяют по выражению

$$I_{\text{к}}^{(3)} = \frac{cU_{\text{н}}}{\sqrt{3}\sqrt{R_{1\Sigma}^2 + X_{1\Sigma}^2}}, \quad (1)$$

где $c = 0,8$ или $1,0; 1,1$ – коэффициент режима тока КЗ; $U_{\text{н}} = (380, 660, 1140)$ В и $(6, 10, 20, 35)$ кВ – возможные номинальные линейные напряжения источника питания; $R_{1\Sigma}, X_{1\Sigma}$ – результирующее активное и индуктивное сопротивление короткозамкнутой электрической цепи.

В случае необходимости определения ударного тока КЗ i_{y} (при рассмотрении трёхфазного КЗ) его значение находится из выражения

$$i_{\text{y}} = \sqrt{2}k_{\text{y}}I_{\text{к}}^{(3)},$$

где $k_{\text{y}} \approx 1 + e^{-0,01/T_{\text{a}}}$ – ударный коэффициент [3]. Ударный коэффициент может иметь несколько иную форму [2], а может задаваться приписным способом [5]; $T_{\text{a}} = \frac{X_{\Sigma}}{\omega R_{\Sigma}}$ – постоянная времени затухания апериодической составляющей тока КЗ.

Двухфазное КЗ электрической цепи – $K^{(2)}$. Значение двухфазного тока КЗ $I_{\text{к}}^{(2)}$ находят по известному выражению трёхфазного тока КЗ $I_{\text{к}}^{(3)}$:

$$I_{\text{к}}^{(2)} = \frac{\sqrt{3}}{2} I_{\text{к}}^{(3)}. \quad (2)$$

Однофазное КЗ электрической цепи – $K^{(1)}$. Значение однофазного тока КЗ $I_{\text{к}}^{(1)}$, если применяется *метод электрической цепи* [6, 8, 11, 12, 14–19], находят по выражению

$$I_{\text{к}}^{(1)} = \frac{U_{\text{н}}}{\sqrt{3} \sqrt{(R_{\text{ф}\Sigma} + R_{\text{н}\Sigma} + R_{\text{доп}})^2 + (X''_{\text{ф}\Sigma} + X''_{\text{н}\Sigma} + X'_{\Sigma})^2}}, \quad (3)$$

где $U_{\text{н}} = (380, 660, 1140)$ В – номинальные линейные напряжения источника питания; $R_{\text{ф}\Sigma}$, $R_{\text{н}\Sigma}$ – результирующие активные сопротивления соответственно фазы, нулевого провода; $R_{\text{доп}}$ – дополнительное активное сопротивление неучтённых элементов, а также отдельных контактных соединений учтенных элементов расчётной схемы; $X''_{\text{ф}\Sigma}$, $X''_{\text{н}\Sigma}$ – результирующие внутренние индуктивные сопротивления соответственно фазы, нулевого провода; X' – внешнее индуктивное сопротивление петли фаза-нуль.

Значение однофазного тока КЗ $I_{\text{к}}^{(1)}$, если применяется *метод симметричных составляющих* [1–3, 11–19], находят по выражению

$$I_{\text{к}}^{(1)} = \frac{U_{\text{н}}}{\sqrt{3} \sqrt{(2R_{1\Sigma} + R_{0\Sigma})^2 + (2X_{1\Sigma} + X_{0\Sigma})^2}}, \quad (4)$$

где $U_{\text{н}} = (380, 660, 1140)$ В – номинальные линейные напряжения источника питания; $R_{1\Sigma}$, $X_{1\Sigma}$ – соответственно суммарное активное и индуктивное сопротивления прямой последовательности цепи до точки КЗ; $R_{0\Sigma}$, $X_{0\Sigma}$ – соответственно суммарное активное и индуктивное сопротивления нулевой последовательности.

Приближённые аналитические методы расчёта тока КЗ. Метод модулей [6–8, 11–19]. Метод даёт приближение тока однофазного КЗ $I_{\text{к}}^{(1)}$ «снизу». То есть он позволяет получать несколько заниженный ток КЗ за счёт оперирования с комплексами сопротивлений не в алгебраической форме, в арифметической форме. Кроме того, он пригоден для определения токов однофазного КЗ.

Ток однофазного КЗ рекомендуется рассчитывать по выражению

$$I_{\text{к}}^{(1)} = \frac{U_{\text{нф}}}{\frac{Z_{\text{т}}}{3} + Z_{\text{ц}}}, \quad (5)$$

где $U_{\text{нф}} = (220, 380, 660)$ В – номинальные фазные напряжения источника питания; $Z_{\text{т}}$ – полное сопротивление (модуль комплекса сопротивления) силового понижающего трансформатора; $Z_{\text{ц}} = \sqrt{R_{\Sigma}^2 + X_{\Sigma}^2}$ – полное сопротивление цепи фаза-нуль остальной части сети между

трансформатором и местом КЗ; R_{Σ} , X_{Σ} – результирующее активное и индуктивное сопротивление цепи.

Ток однофазного КЗ $I_{\text{к}}^{(1)}$ допускается рассчитывать по менее точному выражению

$$I_{\text{к}}^{(1)} = \frac{U_{\text{н}}}{\frac{Z_{\text{т}}}{3} + \sum_{i=1}^n Z_i}, \quad (6)$$

где $U_{\text{нф}} = (220, 380, 660)$ В – номинальные фазные напряжения источника питания; $Z_{\text{т}}$ – полное сопротивление (модуль комплекса сопротивления) силового понижающего трансформатора; Z_i – полное сопротивление цепи фаза-нуль i -го элемента расчётной схемы.

Метод мощностей КЗ [10]. Метод позволяет рассчитать приближенное значение тока трёх- и двухфазного КЗ, то есть $I_{\text{к}}^{(3)}$ и $I_{\text{к}}^{(2)}$. Его точность значительно зависит от степени приближения соотношения активных и индуктивных сопротивлений R_i/X_i элементов расчётной схемы между собой. Трёхфазный ток КЗ $I_{\text{к}}^{(3)}$ находится из выражения

$$I_{\text{к}}^{(3)} = \frac{S_{\text{к}}}{\sqrt{3}U_{\text{н}}}, \quad (7)$$

где $S_{\text{к}}$ – полная мощность короткого замыкания относительно точки КЗ; $U_{\text{н}} = (380, 660, 1140)$ В и $(6, 10, 20, 35)$ кВ – номинальное линейное напряжение сети.

Двухфазный ток КЗ $I_{\text{к}}^{(2)}$ находится из выражения

$$I_{\text{к}}^{(2)} = \frac{S_{\text{к}}}{2U_{\text{н}}}, \quad (8)$$

В формулах (7) и (8) значение полной мощности КЗ последовательно расположенных элементов расчётной схемы определяется по формуле

$$S_{\text{к}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{S_i}}, \quad (9)$$

где S_i – мощность короткого замыкания i -го элемента расчётной схемы, определяемой для условия присоединения отдельного элемента с одной стороны к источнику питания, а с другой стороны имеет место металлическое или естественное КЗ, образуемого конструкцией элемента.

Графические методы расчёта [14, 19]. Графические методы расчёта токов КЗ по сравнению с аналитическими методами имеют ряд существенных преимуществ. Они заключаются в оперативности

определения тока КЗ и наглядном представлении алгоритма его нахождения, что позволяет проводить корректировку графически представленных зависимостей тока КЗ от определяющих его параметров пользователями невысокой квалификации.

Графические методы расчёта токов КЗ можно использовать для нахождения всех основных видов КЗ: трёхфазного $K^{(3)}$, двухфазного $K^{(2)}$ и однофазного $K^{(1)}$. В основном графические методы расчёта используются для нахождения трёхфазных и однофазных замыканий $K^{(1)}$. На рис. 1 показан пример характерной реализации графического метода [14, 19], обеспечивающего учёт влияния двух факторов: длины и сечения проводников линии. Однако требуется учёт номинальной мощности и номинального напряжения трансформатора (рис. 1,б).

На самом деле существенно влияющих факторов значительно больше: номинальная мощность трансформаторов; номинальные напряжения сети; виды коротких замыканий; режим тока КЗ; материал проводников элементов сети и пути протекания токов КЗ; количество учитываемых последовательно включённых элементов сети; и т.д.

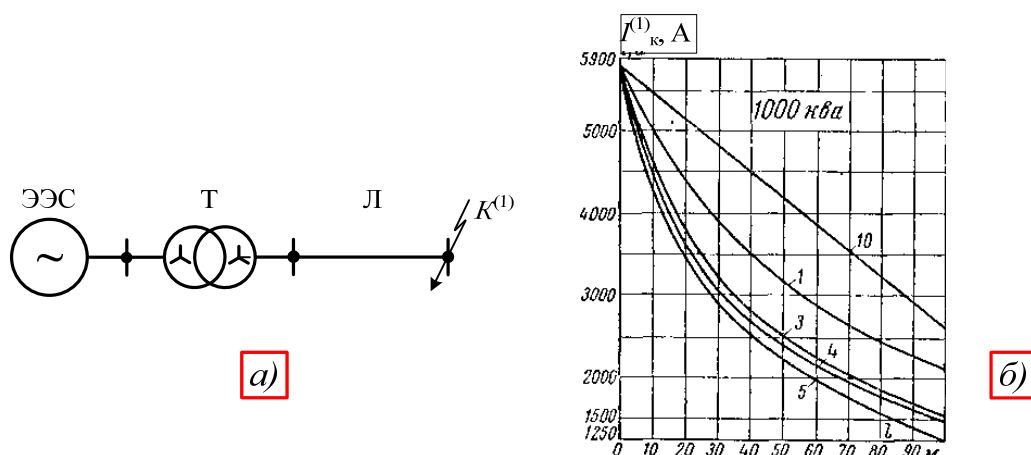


Рис. 1. Расчётная схема (а) и зависимость однофазного тока КЗ от длины линии Л $I_k^{(1)} = f(l)$ в цепи с трансформатором Т с номинальной мощностью $S_H = 1000$ кВА и номинальным напряжением $U_H = 380$ В: 1, 3, 4, 5, 10 – сечение проводника фазного и нулевого в порядке возрастания его значения.

Поэтому преимущества графических методов невозможно реализовать известными подходами [14, 19]. Например, далеко неполная реализация метода, представленная в [14], содержит сорок графиков, подобных графику рис.1,б, что сильно ограничивает область применения.

Для частичного устранения недостатков метода при учёте влияния на значение тока КЗ количества последовательно включаемых линий делались попытки приведения сечения линий с одинаковой электрической проводимостью жил к одной линии, принятой в качестве базисной [14, 19], либо приведения сечения линий к выбранному базисному сечению медного проводника, например, $s_6 = 50 \text{ мм}^2$ [16], по выражению

$$l = l_1 \frac{s_2}{s_1} \quad \text{или} \quad l = l_1 \frac{s_2}{s_6},$$

где l – эквивалентная длина приводимой линии, приведённой к базисному сечению s_1 или s_6 ; l_1 – реальная длина приводимой линии; s_2 – реальное сечение проводника приводимой линии.

В целом учёт неодинаковости сечения последовательно включаемых линий не решает основного недостатка графического метода – использования нескольких десятков графиков. Требуется иной подход к реализации графического метода, позволяющий учитывать все факторы, но при этом иметь приемлемое количество графических зависимостей. Достижение поставленной цели можно достигнуть, совмещая длину линий и сопротивления других элементов расчётной схемы.

Метод базового элемента. Предлагаемое решение основано на введении понятия *базового элемента*, в качестве которого выбирается линия с алюминиевыми проводниками и сечением, равным по значению удельному сопротивлению алюминия $s_{Al} = \rho_{Al}$. В этом случае эквивалентная длина $l_{6Л}$, приводимая к сечению такой линии (базовому сечению s_6) и её сопротивление $R_{6Л}$ связаны соотношением

$$R_{6Л} = \rho_6 \frac{l_{6Л}}{s_6} = 31,5 \frac{l_{6Л}}{31,5} = l_{6Л}, \quad (10)$$

где $R_{6Л} = R_{Л}$ – приведённое $R_{6Л}$ и реальное $R_{Л}$ сопротивления линии $R_{Л}$ равны друг другу; $\rho_{6Al} = 31,5 \text{ мОм} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$ – удельное сопротивление базовой линии из алюминия; $s_{6Al} = 31,5 \text{ мм}^2$ – сечение базовой линии с алюминиевыми проводниками; $l_{6Л}$ – эквивалентная длина приводимой к базовому сечению s_6 линии Л с реальным сечением $s_{Л}$.

В силу (10) активное сопротивление $R_{Л}$ приводимой линии Л с параметрами $l_{Л}$, $\rho_{AlЛ}$, $s_{Л}$ к базовым условиям $l_{6Л}$, ρ_{6Al} , s_{6Al} равно сопротивлению приведённой линии $R_{6Л}$ и её приведённой длине $l_{6Л}$.

Отсюда вытекает, что любой элемент расчётной схемы за исключением линий, имеющих активное сопротивление R_i может быть заменён эквивалентной линией длиной l_i , равной значению его сопротивления

$$l_i = [R_i]. \quad (11)$$

Поскольку реальные номинальные сечения любых проводников s_n не могут быть равны сечению базовой линии $s_n \neq s_{бАЛ} = 31,5 \text{ мм}^2$, то возникает необходимость приведения реального сечения проводников $s_{Л}$ к сечению базовой линии $s_{бАЛ}$. Определение значения базовой длины линии $l_{бЛ}$ путём приведения к базовым условиям $\rho_{бАЛ}$ и $s_{бАЛ}$ выполняется исходя из равенства сопротивлений реальной линии и приведённой к базовым условиям линии $R_{Л} = R_{бЛ}$:

$$l_{бЛ} = l_{Л} \frac{s_{Л}}{s_{бАЛ}}, \quad (12)$$

где $l_{Л}$ – реальная длина приводимой линии Л; $s_{Л}$ – реальное сечение проводника приводимой к базовым условиям линии Л; $s_{бАЛ} = 31,5 \text{ мм}^2$ – сечение базовой линии с алюминиевыми проводниками.

Рис. 2 отображает идею метода с расчётной схемой рис. 1,а.

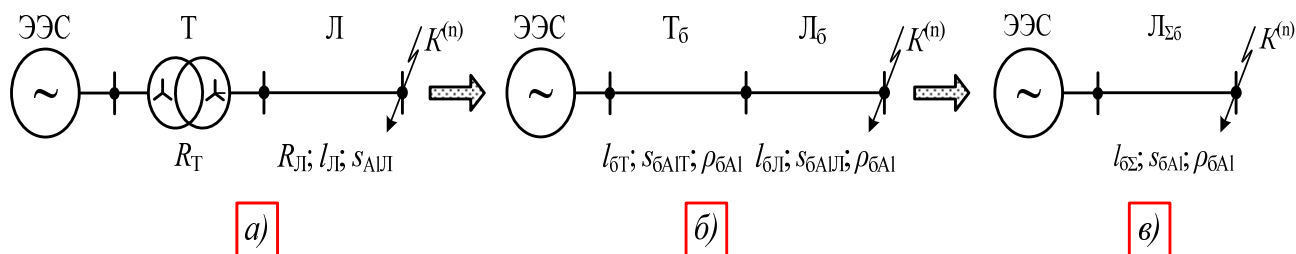


Рис. 2. Этапы преобразования исходной расчётной схемы (а) к поэлементно приведённой расчётной схеме (б) и эквивалентная приведённая расчётная схема

Здесь R_T – исходное активное сопротивление трансформатора Т; R_L , l_L , $s_{АЛЛ}$ – исходные параметры линии Л; $l_{бТ}$, $s_{бАЛТ}$, $\rho_{бАЛ}$ – параметры приведённой к базисным условиям фиктивной линии $T_б$, эквивалентным исходным параметрам трансформатора Т; $l_{бЛ}$, $s_{бАЛЛ}$, $\rho_{бАЛ}$ – параметры приведённой к базисным условиям линии Л; $l_{б\Sigma} = l_{бТ} + l_{бЛ}$, $s_{бАЛ} = 31,5 \text{ мм}^2$, $\rho_{бАЛ} = 31,5 \text{ мОм}\cdot\text{мм}^2/\text{м}$ – эквивалентные параметры всей исходной расчётной схемы, представленной эквивалентной линией $Л_{б\Sigma}$.

Рассмотрим учёт влияющих на значение тока КЗ факторов и преобразование параметров n элементов расчётной схемы ρ_i , s_i , l_i , где $i =$

1, 2, ..., n, к базовым условиям $l_{\text{бЛ}}, \rho_{\text{бАл}}, s_{\text{бАл}}$. Если проводник выполнен из другого проводящего металла, то приведение к базовым условиям $l_{\text{бЛ}}, \rho_{\text{бАл}}, s_{\text{бАл}}$ выполняется в два этапа: 1) по удельному сопротивлению ρ_{Cu} ; 2) по сечению s_{Cu} (12). Токоведущие части линии – медные.

Приведение сопротивления медного проводника к сопротивлению алюминиевого проводника выполняется из равенства сопротивлений реальной линии и приведённой к базовым условиям $R_{\text{Л}} = R_{\text{бЛ}}$:

$$R_{\text{Cu}} = \rho_{\text{Cu}} \frac{l_{\text{Cu}}}{s_{\text{Cu}}} = \frac{\rho_{\text{Al}}}{\rho_{\text{Al}}} \rho_{\text{Cu}} \frac{l_{\text{Cu}}}{s_{\text{Cu}}} = \frac{\rho_{\text{Cu}}}{\rho_{\text{Al}}} \rho_{\text{Al}} \frac{l_{\text{Cu}}}{s_{\text{Cu}}} \approx \rho_{\text{Al}} \frac{0,588 \cdot l_{\text{Cu}}}{s_{\text{Cu}}} = \rho_{\text{Al}} \frac{l_{\text{Cu}}}{s_{\text{Cu}}/0,588}. \quad (13)$$

На основании выражения (13) видно, что приведение сопротивления медного проводника к сопротивлению алюминиевого проводника равносильно либо уменьшению реальной длины медного проводника в 0,588 l_{Cu} раз, либо увеличению его сечения в $s_{\text{Cu}}/0,588$ раз. Далее останавливаемся на приведении по длине линии $l_{\rho\text{Л}} = 0,588 l_{\text{Cu}}$ из-за различия по удельному сопротивлению меди и алюминия.

На втором этапе приведение длины линии к базовым условиям $l_{\text{бЛ}}$ выполняется по сечению s_{Cu} (12)

$$l_{\text{бЛ}} = 0,588 l_{\text{Cu}} \frac{s_{\text{Cu}}}{s_{\text{бАл}}}, \quad (14)$$

Приведённая к базовым условиям линия с медными проводами имеет следующие параметры $l_{\text{бЛ}}, \rho_{\text{бАл}}, s_{\text{бАл}}$. Приведение параметров линии с медными проводами сводится к приведению реальной длины линии $l_{\rho\text{Л}}$ к длине линии при базовых условиях $l_{\text{бЛ}}$, так как остальные параметры линии $\rho_{\text{бАл}}, s_{\text{бАл}}$ не изменяются. Токоведущие части линии – стальные.

В силу нелинейного внутреннего активного сопротивления от значения тока $R_{\text{Fe}} = f(I)$ в расчётах используют сопротивление R_{Fe} , полученное экспериментально. Сначала определяют значение удельного сопротивления для заданного значения тока КЗ I :

$$\rho_{\text{Fe}}(I) = R_{\text{Fe}} \frac{s_{\text{Fe}}}{l_{\text{Fe}}}.$$

Из (13) приведение длины стального проводника l_{Fe} к сопротивлению алюминиевого проводника выполняется по формуле

$$l_{\rho\text{Л}} = \frac{\rho_{\text{Fe}}}{\rho_{\text{Al}}} l_{\text{Fe}}$$

На втором этапе приведение длины линии к базовым условиям $l_{бЛ}$ выполняется по сечению S_{Fe} и в соответствии с выражением (12)

$$l_{бЛ} = \frac{\rho_{Fe}}{\rho_{Al}} l_{Fe} \frac{S_{Fe}}{S_{бAl}}, \quad (15)$$

Если элемент расчётной схемы трансформатор, то в соответствии со свойствами базового элемента (11) базовая длина $l_{бТ}$ фиктивной линии $T_б$ (см. рис. 2, б) равна активному сопротивлению трансформатора

$$l_{бТ} = R_T. \quad (16)$$

Если элементом расчётной схемы является дополнительное сопротивление $R_{доп}$, то по аналогии с трансформатором можно записать длину $l_{б,доп}$ фиктивной линии

$$l_{б,доп} = R_{доп}. \quad (17)$$

Учёт теплового спада тока КЗ из-за увеличения активного сопротивления линии за счёт нагрева протекающим током осуществляется введением поправочного коэффициента k_θ , определяемого по номограммам [15], следующим образом

$$l_{б\theta} = k_\theta l_{бЛ}. \quad (18)$$

Влияние дуги можно учитывать либо уменьшением напряжения источника питания в зависимости от условий её горения на 10–20 % либо вводя её сопротивлением [1, 3, 4] по выражению

$$l_{бд} = R_d,$$

где R_d – сопротивление дуги.

Приведённая к базовым условиям длина $l_{б\Sigma}$ эквивалентной линии $L_{б\Sigma}$ равна сумме отдельных длин $l_{бi}$ элементов расчётной схемы

$$l_{б\Sigma} = \sum_{i=1}^n l_{бi}.$$

В силу преобладания активного сопротивления над индуктивным сопротивлением у большинства элементов распределительной сети учёт индуктивного сопротивления эквивалентной приведённой расчётной схемы можно выполнять путём введения «индуктивной» поправки k_X , тем самым увеличивая «активную» длину эквивалентной линии $L_{б\Sigma}$

$$l_{б\Sigma RX} = l_{б\Sigma R} \sqrt{1 + \frac{l_{б\Sigma X}}{l_{б\Sigma R}}} = k_X l_{б\Sigma R}, \quad (19)$$

где $l_{6\Sigma RX}$ – приведённая к базовым условиям длина эквивалентной линии $L_{6\Sigma}$ расчётной схемы с учётом индуктивного сопротивления; $l_{6\Sigma R}$ – приведённая к базовым условиям длина эквивалентной линии $L_{6\Sigma}$ расчётной схемы без учёта индуктивного сопротивления; $l_{6\Sigma X}$ – приведённая к базовым условиям «индуктивная» длина линии $L_{6\Sigma}$.

По аналогии с понятием базового активного элемента расчётной схемы введем понятие базового индуктивного элемента. Тогда базовая индуктивная длина i -го элемента l_{6Xi} будет равна его индуктивному сопротивлению, выраженному в именованных единицах

$$l_{6Xi} = X_i, \quad (20)$$

Приведённая к базовым условиям «индуктивная» длина $l_{6\Sigma X}$ эквивалентной линии $L_{6\Sigma}$:

$$l_{6\Sigma X} = \sum_{i=1}^n l_{Xi}$$

где n – количество отдельных длин элементов расчётной схемы.

Учёт вида КЗ. *Трёхфазное КЗ $K^{(3)}$.* Определение значений базовой длины $l_{6\Sigma(3)}$ эквивалентной линии $L_{6\Sigma}$ следует выполнять для одной фазы электрической цепи суммируя отдельные, приведённые к базовым условиям, длины элементов расчётной схемы. *Двухфазное КЗ $K^{(2)}$.* Определение значений базовой длины $l_{6\Sigma(2)}$ эквивалентной линии $L_{6\Sigma}$ следует выполнять по выражению

$$l_{6\Sigma(2)} = \frac{2}{\sqrt{3}} l_{6\Sigma(3)}. \quad (21)$$

для одной фазы электрической цепи суммируя отдельные, приведённые к базовым условиям, длины элементов расчётной схемы. *Однофазное КЗ $K^{(1)}$.* Определение значений базовой длины $l_{6\Sigma(1)}$ эквивалентной линии $L_{6\Sigma}$ следует выполнять по выражению

$$l_{6\Sigma(1)} = l_{6\Sigma\phi} + l_{6\Sigma N},$$

где $l_{6\Sigma\phi}$ – значение базовой длины эквивалентной линии $L_{6\Sigma}$ одной фазы электрической цепи; $l_{6\Sigma N}$ – значение базовой длины эквивалентной линии $L_{6\Sigma}$ PE или PEN электрической цепи.

Учет режимов тока цепи. Режимы тока КЗ учитываются изменением напряжения источника питания. Для максимального (минимального) тока напряжение источника принимается $U = 1,1U_n$ ($U = 1,0U_n$). При

необходимости учёта составляющих тока КЗ от двигателей принимают напряжение источника в режиме максимального тока: $U = 1,1U_n$, если двигатель синхронный, и $U = 0,9U_n$, если двигатель асинхронный.

В случае наличия нескольких источников питания схему замещения приводят к совокупности нескольких радиальных ветвей и определяют отдельно токи КЗ в каждой из них. Ток в месте КЗ $I_{к\Sigma}^{(n)}$ находят суммированием токов КЗ всех ветвей

$$I_{к\Sigma}^{(n)} = \sum_{i=1}^n I_{ki}$$

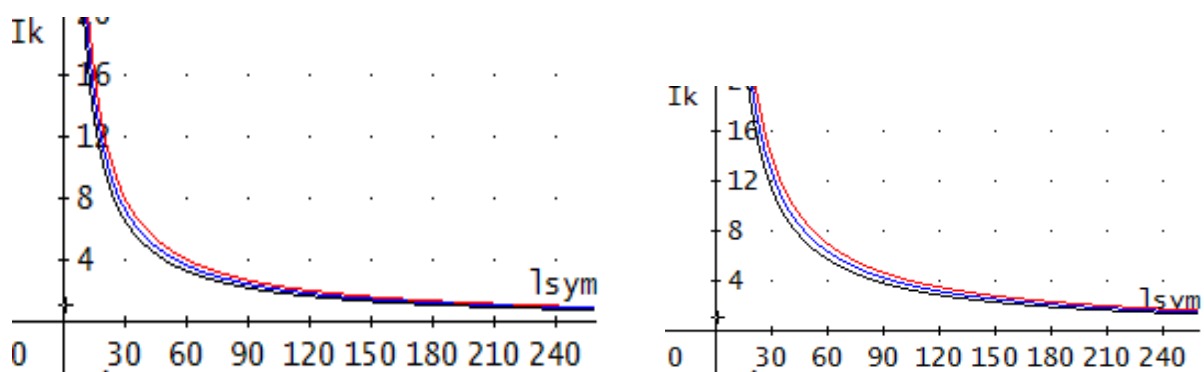
где n – количество радиальных ветвей.

Ток КЗ радиальной ветви схемы замещения:

$$I_k^{(n)} = \frac{cU_n}{\sqrt{3}l_{\Sigma(n)}}, \quad (22)$$

где c – коэффициент режима тока КЗ или условий расчёта его; $U_n = (380, 660, 1140)$ В и $(6, 10, 20, 35)$ кВ – номинальные линейные напряжения источника питания распределительных сетей; $l_{\Sigma(n)}$ – базовая длина $l_{\Sigma(n)}$ эквивалентной линии L_{Σ} конкретного вида КЗ. Если расчёт тока КЗ проводят в низковольтной (высоковольтной) сети, то базовую длину выражают в метрах (километрах).

На основе выражения (22), построены графические зависимости $I_k^{(n)} = f(l_{\Sigma(n)})$ для трёх номинальных напряжений источника питания распределительных сетей $U_n = (380, 660, 1140)$ В (рис. 3). Аналогичные зависимости можно построить для $U_n = (6, 10, 20, 35)$ кВ. Таким образом, с помощью предложенного метода удалось свести задачу к семи графикам (вместо сотни графиков по известной методике [14]).



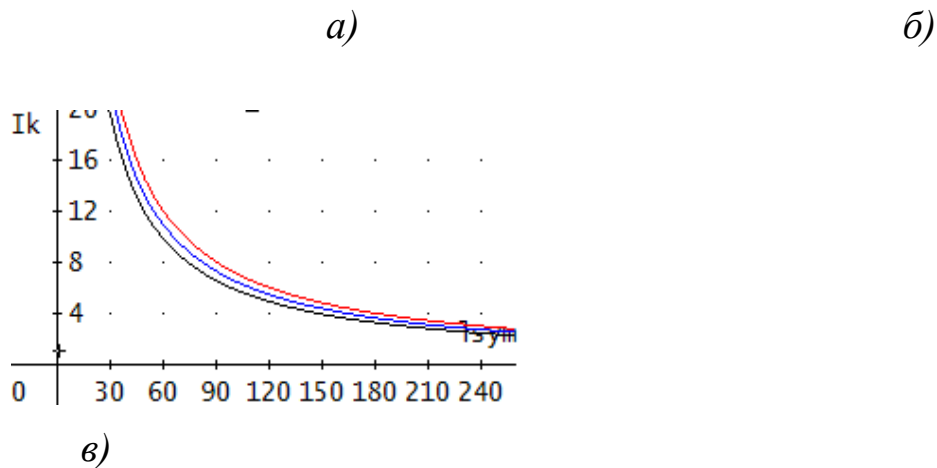


Рис. 3. Зависимости тока КЗ от длины базового элемента $I_{\text{к}}^{(n)} = f(l_{6\Sigma(n)})$:
a – в сети с $U_{\text{н}} = 380$ В; *б* – в сети с $U_{\text{н}} = 660$ В;
в – в сети с $U_{\text{н}} = 1140$ В.

Выводы

1. Предложенный метод базового элемента позволяет графически определять наиболее распространенные виды токов КЗ в распределительных сетях 0,38–35 кВ.
2. Метод обеспечивает оперативный расчёт токов КЗ без применения компьютера, что может повысить производительность испытательных, монтажных, и эксплуатационных работ на электроустановках.
3. Простота и наглядность алгоритма определения тока КЗ позволяет достаточно быстро вносить корректировки оборудования специалистами невысокой квалификации.

Список литературы

1. ГОСТ 28249–93. Короткие замыкания в электроустановках. Методы расчёта в электроустановках переменного тока напряжением до 1 кВ. – М. : Изд-во стандартов, 1994.
2. Application guide for calculation of short-circuit currents in low-voltage radial systems. Standard IEC, publication 781.– 1989. – 58 p.
3. РД 153-34.0-20.527–98. Руководящие указания по расчёту токов короткого замыкания и выбору электрооборудования. – М. : Изд-во НЦ

ЭНАС, 2001. – 152 с.

4. СО 34.20.808. Методические указания по расчёту токов короткого замыкания в сети напряжением до 1 кВ электростанций и подстанций с учётом влияния электрической дуги. – М. : СПО ОРГРЭС, 1993. – 49с.

5. Правила устройства электроустановок (ПУЭ) / 7-е издание // Главгосэнергонадзор. – 2003.

6. Инструктивные материалы государственной инспекции по энергонадзору – М. : Энергия, 1977. – С. 108–110.

7. М788–1080. Указания по расчёту токов однофазных коротких замыканий в сетях до 1 кВ. – М. : Тяжпромэлектропроект, 1993.

8. Рекомендации по расчёту сопротивления цепи фаза-нуль. Центральное бюро научно-технической информации. – М. : Главэлектромонтаж, 1986.

9. Schneider Electric: Руководство по электрическим установкам.– 2005.

10. АВВ – Справочник по электрооборудованию. Устройства защиты и управления. Электрические устройства. 6-е изд. – 2014.

11. Рекомендации по расчёту сопротивления цепи фаза-нуль / Главэлектромонтаж, Центральное бюро научно-технической информации. – М., 1986.

12. Инструкция по определению токов короткого замыкания в разветвлённых электрических сетях низкого напряжения жилых и общественных зданий. – М. : МНИИТЭП, 1977.

13. Жуков В.В. Короткие замыкания в электроустановках напряжением до 1 кВ. – М. : Издательство МЭИ. – 2004. – 192 с.

14. Беляев А.В. Выбор аппаратуры, защит и кабелей в сетях 0,4 кВ / Беляев А.В: учебное пособие – СПб. : ПЭИПК, 2008. – 230 с.

15. Голубев М.Л. Расчёт токов короткого замыкания в электросетях 0,4–35 кВ. – изд. 2-е, перераб. и доп. – М. : Энергия, 1980. – 87 с.

16. Дзюбан В.С. Справочник энергетика угольной шахты / В.С. Дзюбан, Я.С. Римап, А.К. Маслий – М.: Недра, 1983. – 542 с.

17. Найфельд М.Р. Заземление, защитные меры электробезопасности. – 4-е изд., перераб. и доп. – Л. : 1971. – 312 с.

18. Спсваков П.И. Проверка на автоматическое отключение линий в сетях до 1000 В.– М. : Энергия, 1971. – 88 с.

19. Справочник по релейной защите / под общ. ред. М. А. Берковича – М–Л.: ГЭИ, 1963 – 512 с.

20. <http://wikiprograms.org/elprotect/> – «ElProtect» – программа расчёта токов короткого замыкания, проверки устройств защиты в электрических сетях напряжением до 1000 В и срабатывания защитных аппаратов по расчётным величинам токов короткого замыкания.

21. <https://freesoft.ru/avral/download> – «Аврал» – программа для расчёта токов короткого замыкания в электрических сетях до 1000 В.

22. http://rza.org.ua/down/open/programma-dlya-raschetov-tokov-korotkogo-zamikaniya-kz_117.html .– Программа расчёта токов короткого замыкания КЗ в сетях с номинальным напряжением 0,4 кВ и 10 кВ.

Александров Дмитрий Степанович – канд. техн. наук, доцент кафедры "Электроснабжение" УлГТУ. Сл. тел. (8-8422)77-82-32.

Калашников Алексей Сергеевич – магистрант энергетического факультета УлГТУ. Сл. тел. (8-8422)77-83-97.

СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ

КОДИРОВАНИЕ ДИСТРИБУТИВНОЙ РЕШЕТКИ МИНИМАЛЬНЫХ РАЗРЕЗОВ ГРАФА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

А. А. Гришкевич

Представлено кодирование дистрибутивной решетки минимальных разрезов графа. Получена эффективная программная реализация решетчатых операций на введенных кодах элементов графа.

The encoding of the distributive lattice of minimal graph cuts is presented. An effective program realization of lattice operations on the entered codes of the elements of the graph is obtained.

Введение. Нахождение всех минимальных разрезов, разделяющих заданные вершины в графе, является важным этапом в определении вероятностных характеристик связности электрических цепей (сетей электроснабжения и связи различного назначения, распределенных вычислительных и информационных сетей). Минимальные разрезы используются также при анализе сетей газо-, нефте-, водоснабжения.

Дистрибутивная решетка минимальных разрезов. Пусть $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ – ориентированный граф, где $\mathcal{V} = \{v\}$ – множество вершин графа ($s \neq t \in \mathcal{V}$), $\mathcal{U} = \{u = (i, j) : i, j \in \mathcal{V}\}$ – множество ориентированных дуг графа, $\varepsilon(A, B) = \{(i, j) : (i, j) \in \mathcal{U}, i \in A, j \in B\}$ – множество дуг, ведущих из $i \in A$ в $j \in B$. Разрезом, разделяющим вершины s, t графа $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$, называется множество дуг $r = \varepsilon(R, \bar{R}) \subseteq \mathcal{U}$, где $R \cap \bar{R} = \emptyset$, $R \cup \bar{R} = \mathcal{V}$, $s \in R$, $t \in \bar{R}$. Множество таких разрезов обозначим посредством \mathcal{R}^F . Будем использовать звёздочку для формального различия разреза как множества дуг ($r = \varepsilon(R, \bar{R}) \in \mathcal{R}^F$) и его обозначения в виде соответствующего разбиения множества вершин ($r^* = (R, \bar{R})$). В множестве разрезов \mathcal{R}^F графа \mathcal{G} может быть выделено подмножество разрезов минимального веса

$$\mathcal{M}^F = \{ m : m = \arg \min_{r \in \mathcal{R}^F} c(r) \},$$

где $c : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $c(r) = c(R, \bar{R}) = \sum_{u \in \varepsilon(R, \bar{R})} c(u)$.

В [1] установлено, что множество минимальных реберных разрезов \mathcal{M}^F ориентированного графа \mathcal{G} , разделяющих две заданные вершины s, t , может рассматриваться как дистрибутивная решетка $\langle \mathcal{M}^F; \vee, \wedge \rangle$, т.е. множество $\mathcal{M}^F = \{m_i^* = (M_i, \bar{M}_i)\}$ с двумя бинарными операциями \vee, \wedge :

$$m_3 = m_1 \vee m_2, \quad m_4 = m_1 \wedge m_2, \quad (1)$$

где $M_3 = M_1 \cup M_2$, $M_4 = M_1 \cap M_2$, которые удовлетворяют тождествам коммутативности, ассоциативности, поглощения и дистрибутивности. На основе указанного свойства построены алгоритмы [1] нахождения минимальных разрезов графа \mathcal{M}^F , которые основаны на поиске в графе только неприводимых минимальных разрезов $\mathcal{P}^F \subseteq \mathcal{M}^F$, и синтезе множества разрезов $\mathcal{M}^F \setminus \mathcal{P}^F$ в дистрибутивной решетке минимальных

разрезов по подмножеству неприводимых разрезов \mathcal{P}^F на основе операций \vee, \wedge . Однако алгоритмическая реализация операций \vee, \wedge в решетке \mathcal{M}^F , основанная на непосредственном определении операций (1), весьма сложна (трудоемка). Поэтому рассмотрим кодирование решетки \mathcal{M}^F для упрощения реализации операций \vee, \wedge на множестве \mathcal{M}^F .

Кодирование дистрибутивной решетки минимальных разрезов.

Обозначим $\mathcal{N}_j = \{z_{j1} < z_{j2} < \dots < z_{j,n_j-1}\}$, $z_{ji} \in \mathbb{N}$, $j=1,2, \dots, l$, $i=1,2, \dots, n_j-1$, линейно упорядоченные множества, $\mathcal{Q} = \prod_{j=1}^l \mathcal{N}_j$ декартово произведение упорядоченных множеств \mathcal{N}_j .

Решеткой произведения цепей [2, 3] называется решетка

$$\langle \mathcal{Q}; \min, \max \rangle,$$

в которой $\forall \hat{q}_1, \hat{q}_2 \in \mathcal{Q}$ ($\hat{q}_i = (q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{il})$, $q_{ji} \in \mathcal{N}_j$, $i=1,2$, $j=1,2, \dots, l$) операции \min, \max задаются

$$\begin{aligned} \min\{\hat{q}_1, \hat{q}_2\} &= (\min\{q_{11}, q_{21}\}, \min\{q_{12}, q_{22}\}, \dots, \min\{q_{1l}, q_{2l}\}), \\ \max\{\hat{q}_1, \hat{q}_2\} &= (\max\{q_{11}, q_{21}\}, \max\{q_{12}, q_{22}\}, \dots, \max\{q_{1l}, q_{2l}\}). \end{aligned}$$

Ясно, что отношение частичного порядка в решетке \mathcal{Q} описывается следующим образом: $\hat{q}_1 \leq \hat{q}_2 \Leftrightarrow q_{j1} \leq q_{j2}$ для всех $j=1,2, \dots, l$; $\hat{q}_1 \geq \hat{q}_2 \Leftrightarrow q_{j1} \geq q_{j2}$ для всех $j=1,2, \dots, l$; $\hat{q}_1 \parallel \hat{q}_2 \Leftrightarrow \exists i \neq j$ такие что $q_{i1} < q_{i2}$ и $q_{j1} > q_{j2}$ или $q_{i1} > q_{i2}$ и $q_{j1} < q_{j2}$.

Множество W называется подрешеткой решетки \mathcal{Q} [3], если $W \subseteq \mathcal{Q}$, и

$$\forall \hat{q}_1, \hat{q}_2 \in W \Rightarrow \max\{\hat{q}_1, \hat{q}_2\} \in W, \min\{\hat{q}_1, \hat{q}_2\} \in W.$$

Известно [3], что, во-первых, каждая подрешетка произведения цепей дистрибутивна, и, во-вторых, любая дистрибутивная решетка изоморфна некоторой подрешетке произведения цепей.

Кодированием решетки \mathcal{M}^F [3] называется изоморфизм $\psi : \mathcal{M}^F \rightarrow \langle W; \min, \max \rangle$. Ясно, что для получения изоморфизма ψ достаточно установить изоморфизм неприводимых элементов решеток \mathcal{M} и W .

Пусть

$$f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

максимальный поток из источника s в сток t ,

$$\mathbb{C} = \{C_j = (A_j, \mathcal{E}_j) : j=1, 2, \dots, l\},$$

где $A_j = \{a_{jk} : k=1, 2, \dots, n_j\} \subseteq \mathcal{V}$, $\mathcal{E}_j = \{e_{jk} = (a_{jk}, a_{j,k+1}) : k=1, 2, \dots, n_j - 1\} \subseteq \mathcal{U}$, — цепное разложение потока f [4].

Для $\forall m_i \in \mathcal{M}^F$ возможно представление $m_i = \{e_{jq_{ji}} : j=1, 2, \dots, l\}$ [1], где дуга $e_{jq_{ji}} = \mathcal{E}_j \cap \varepsilon(M_i, \overline{M_i})$ есть общая дуга разреза m_i и цепи $C_j(A_j, \mathcal{E}_j)$, q_{ji} — порядковый номер этой дуги ($e_{jq_{ji}} \in m_i$) в цепи C_j . Этот номер и используем при установлении изоморфизма ψ .

Для $m_i \in \mathcal{M}^F$ зададим $\psi(m_i) = (q_{1i}, q_{2i}, \dots, q_{li}) = \hat{q}_i$. Понятно, что по представлению (коду) разреза может быть восстановлен и сам разрез $\psi^{-1}(\hat{q}_i) = m_i$.

Пример (кодирование решетки двухэлементных минимальных разрезов). Множество двухэлементных разрезов графа, представленного на рис. 1, есть $d_1 = \{(1, 3), (1, 2)\}$, $d_2 = \{(3, 6), (1, 2)\}$, $d_3 = \{(6, 7), (1, 2)\}$, $d_4 = \{(7, 8), (1, 2)\}$, $d_5 = \{(1, 3), (2, 4)\}$, $d_6 = \{(3, 6), (2, 4)\}$, $d_7 = \{(6, 7), (2, 4)\}$, $d_8 = \{(7, 8), (2, 4)\}$, $d_9 = \{(6, 7), (4, 8)\}$, $d_{10} = \{(7, 8), (4, 8)\}$.

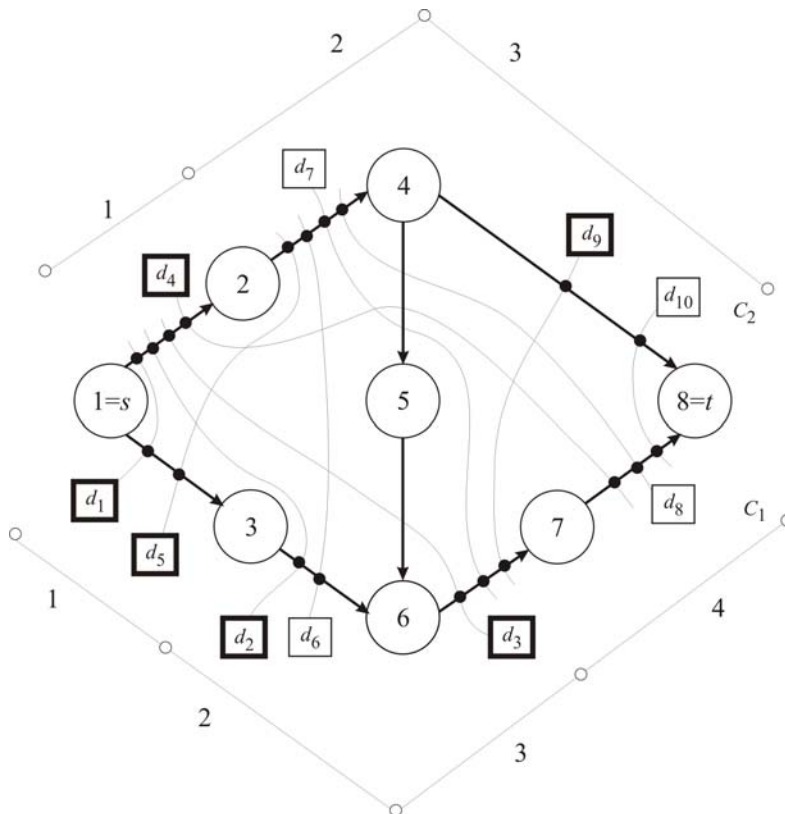


Рис. 1. Множество минимальных разрезов \mathcal{M}^F

Положим $f(u) = 1 \forall u \in \mathcal{U}$. Тогда $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$, где $\mathcal{A}_1 = \{1, 3, 6, 7, 8\}$, $\mathcal{E}_1 = \{(1, 3), (3, 6), (6, 7), (7, 8)\}$, $\mathcal{A}_2 = \{1, 2, 4, 8\}$, $\mathcal{E}_2 = \{(1, 2), (2, 4), (4, 8)\}$. Здесь $\mathcal{A}_1 = \{a_{1k} : k = 1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{E}_1 = \{e_{1k} : k = 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{A}_2 = \{a_{2k} : k = 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{E}_2 = \{e_{2k} : k = 1, 2, 3\}$, $a_{11} = 1$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = 6$, $a_{14} = 7$, $a_{15} = 8$, $e_{11} = (1, 3)$, $e_{12} = (3, 6)$, $e_{13} = (6, 7)$, $e_{14} = (7, 8)$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 2$, $a_{23} = 4$, $a_{24} = 8$, $e_{21} = (1, 2)$, $e_{22} = (2, 4)$, $e_{23} = (4, 8)$.

В этом случае $\mathcal{N}_1 = \{1 < 2 < 3 < 4\}$, $\mathcal{N}_2 = \{1 < 2 < 3\}$ (перенумерацией всегда можно добиться, чтобы множества \mathcal{N}_j всегда являлись последовательными отрезками натурального ряда без пропусков, т.е. $\{1 < 2 < \dots < k_j\}$). Заметим, что дополнительно может быть рассмотрена биекция $\tau : z_{jk} \rightarrow e_{jk}$, где $z_{jk} \in \mathcal{N}_j$, $e_{jk} \in \mathcal{E}_j \subseteq \mathcal{U}$, $j = 1, 2$, $k = 1, 2, \dots, n_j - 1$. Так, для цепей $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1: \tau(1) &= (1, 3), \tau(2) = (3, 6), \tau(3) = (6, 7), \tau(4) = (7, 8); \\ \mathcal{N}_2: \tau(1) &= (1, 2), \tau(2) = (2, 4), \tau(3) = (4, 8). \end{aligned}$$

Указанная биекция полезна при переходе от элементов решетки \mathcal{W} к элементам решетки \mathcal{M}^F .

Ясно, что, например,

$$d_9 = \{e_{1q_{19}}, e_{2q_{29}}\} = \{e_{13}, e_{23}\},$$

т.е. $q_{19} = 3$, $q_{29} = 3$. Следовательно,

$$\psi(d_9) = \widehat{q}_9 = (q_{19}, q_{29}) = (3, 3).$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \psi(d_1) &= \widehat{q}_1 = (1, 1), \psi(d_2) = \widehat{q}_2 = (2, 1), \psi(d_3) = \widehat{q}_3 = (3, 1), \\ \psi(d_4) &= \widehat{q}_4 = (4, 1), \psi(d_5) = \widehat{q}_5 = (1, 2), \psi(d_6) = \widehat{q}_6 = (2, 2), \\ \psi(d_7) &= \widehat{q}_7 = (3, 2), \psi(d_8) = \widehat{q}_8 = (4, 2), \psi(d_{10}) = \widehat{q}_{10} = (4, 3). \end{aligned}$$

Это обусловлено соотношениями:

$$\begin{aligned} \max\{\widehat{q}_2, \widehat{q}_5\} &= (\max\{2, 1\}, \max\{1, 2\}) = (2, 2) = \widehat{q}, \\ \psi^{-1}(\widehat{q}) &= \{\tau(2), \tau(2)\} = \{(3, 6), (2, 4)\} = d_6, \end{aligned}$$

то $d_2 \vee d_5 = d_6$. Это подтверждает простоту и наглядность реализации операций \vee, \wedge над разрезами в решетке \mathcal{W} .

Кодирование соответствует переходу от представления решетки $\langle \mathcal{M}^F; \vee, \wedge \rangle$ рис. 2 к представлению рис. 3. Неприводимые разрезы на рис. 1-3 выделены утолщенной линией.

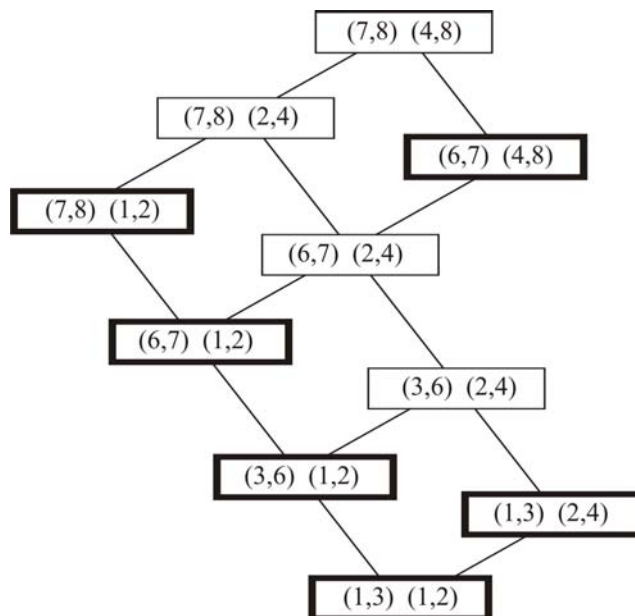


Рис. 2. Дистрибутивная решетка минимальных разрезов

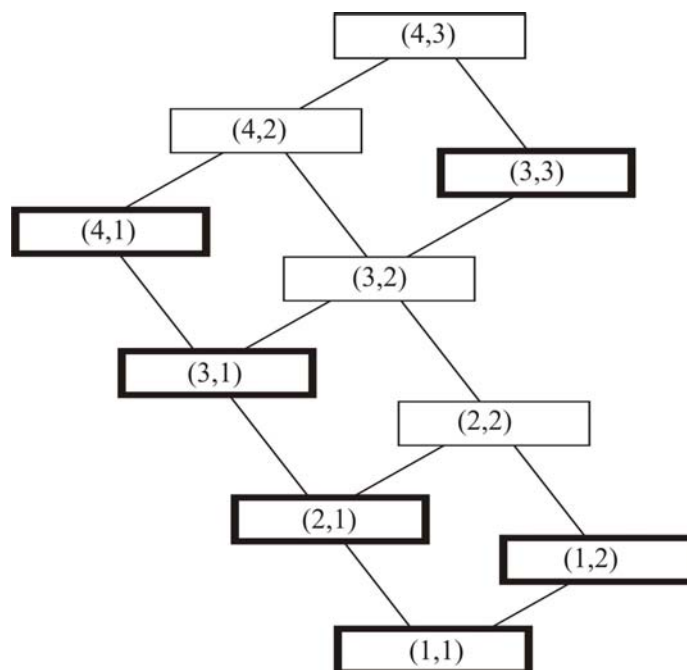


Рис. 3. Кодирование дистрибутивной решетки минимальных разрезов

Вывод. Кодирование позволяет присвоить элементам разрезов номер, являющийся порядковым номером в некоторой цепи, что обеспечивает эффективное хранение дистрибутивной решетки в данных типа массив.

Список литературы

1. Гришкевич А.А. Комбинаторные методы исследования экстремальных структур математических моделей электрических цепей и систем. – Челябинск: Издательство ЮУрГУ, 2004. – 258 с.
2. Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 1980. – 336 с.
3. Айгнер М. Комбинаторная теория. – М.: Мир, 1982. – 558 с.
4. Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях. – М.: Мир, 1966. – 276 с.

Гришкевич Андрей Александрович – д.т.н., чл.-корр. АЭН, профессор Ченстоховского политехнического института, Polska, 42-200, Czestochowa, al. Armii Krajowej, 17, Politechnika Czestochowska (Czestochowa university of technology)); профессор Южно-Уральского государственного университета, Россия, 454080, Челябинск, проспект Ленина, 76; e-mail: a.grischkevich@el.pcz.czest.pl; grishkev_ramb@rambler.ru

АЛГОРИТМ ОТБОРА ВЕРШИН ДЛЯ НАРАЩИВАНИЯ НЕИЗОМОРФНЫХ КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Э. А. Свирщева

Предложен алгоритм отбора вершин канонического дерева с q вершинами для перехода от него к каноническим деревьям с $(q+1)$ вершинами при лексикографическом порядке перечисления неизоморфных корневых деревьев. Показаны варианты отбора допустимых вершин, как с применением, так и без применения компьютера.

An algorithm for selecting vertices of a canonical tree with q vertices to move from it to canonical trees with $(q+1)$ vertices for lexicographical order of enumeration of non-isomorphic root trees is proposed. Shows options of selecting the valid vertices, as with the use and without the use of computer.

Перечисление деревьев по высоте. Как показано в [1], большинство известных алгоритмов порождения неизоморфных корневых деревьев предусматривают последовательное перечисление деревьев равной высоты в соответствии с перечислительной формулой Оттера [2]. Алгоритм генерации неизоморфных корневых деревьев считается эффективным, если он характеризуется числом простых действий, пропорциональным числу искомым деревьев [3–6].

Алгоритмы, опубликованные в более поздних работах [5, 6], претерпели качественные изменения – было предложено рекурсивное наращивание – структурный синтез деревьев от одного ребра до семейства деревьев с требуемым числом вершин. Указанные работы выделяются самыми короткими программами и различаются только используемым представлением дерева: генеалогическим или ярусным кодом.

Перечисление деревьев в лексикографическом порядке. Такой порядок построения неизоморфных корневых деревьев, применяемый в работах [7,8,9] и других современных работах [1], принципиально отличается от порядка Оттера [2], характерного для работ [3–6]. Методы структурного синтеза неизоморфных корневых деревьев, рассмотренные в [7,8,9], основаны на использовании информации о симметриях поддеревьев, порождающих изоморфные деревья. Для этого потребовались другие математические модели дерева, которые позволяют учесть все его симметрии с целью не допустить построения изоморфных корневых деревьев в процессе синтеза.

В работах [8,9] дерево представлено лексикографически (далее лг) упорядоченным списком его ребер, который задан выбранным принципом нумерации его вершин в алфавите $(0,1,2,\dots,q)$. Такое представление каждого дерева определяет лг упорядочение всех деревьев.

В работе [9] предложена математическая модель дерева в виде свертки его путей от корня к конечным вершинам. На представлении дерева сверткой основан эффективный метод выявления симметрий.

В свертке дерева сразу видны все подмножества симметричных вершин (s_1 -классы). Проверка симметрии пары поддеревьев сводится к

сравнению структур слагаемых свертки, выраженных парой кодовых слов. Такое сравнение может быть реализовано на компьютере.

В работе [9] доказано, что при наличии канонического [10,11] дерева T_q с q вершинами и $(q-1)$ ребрами переход к каноническому дереву $T_{(q+1)}$ с $(q+1)$ вершинами и q ребрами может быть сведен к отбору вершин дерева T_q для присоединения q -го ребра. Условимся в дальнейшем называть такие вершины допустимыми.

В [9] также рассмотрен метод структурного синтеза неизоморфных корневых деревьев на основе отбора допустимых вершин и приведен пример перехода от канонических деревьев T_8 к каноническим деревьям T_9 методом отбора вершин для присоединения к дереву T_8 8-го ребра. В работе [8] доказано, что допустимыми могут быть только вершины с номерами j , которые лг не старше начальной вершины j^* младшего ребра дерева T_q , т.е, их номера ограничиваются неравенством $j \geq j^*$.

Эта статья посвящена разработке алгоритма отбора допустимых вершин дерева T_q для присоединения к ним q -го ребра и вариантам применения этого алгоритма в структурном синтезе корневых деревьев.

Алгоритм выявления допустимых вершин по свертке дерева T_q . Задача вычисления допустимых вершин состоит из двух подзадач – вычисления симметрий поддеревьев дерева T_q и вычисления вершин для присоединения к этому дереву очередного ребра с учетом указанных симметрий. Здесь рассматривается решение второй задачи, так как задача выявления симметрий может решаться отдельно и различными методами.

Покажем, что при синтезе неизоморфных корневых деревьев методом отбора допустимых вершин можно не проверять условия 3) утверждения 3, приведенного в работе [8], так как оно всегда выполняется.

***Утверждение.** После присоединения q -го ребра к любой из допустимых вершин канонического дерева T_q сохраняется упорядоченность его вершин по не возрастанию их полустепеней исхода.*

Доказательство. Все поддеревья канонического дерева T_q , как и их корни, лг упорядочены. Это значит, что в свертке дерева старшие места заняты ее слагаемыми, которые имеют минимальное количество множителей перед их скобками.

Первый элемент в каждом произведении этих элементов является лг старшим среди них. Упорядоченность поддеревьев дерева T_q с общим корнем 0 (как и их поддеревьев) по не возрастанию их полустепеней исхода, определяется лг упорядочением старших слагаемых сверток.

Поскольку допустимыми могут быть только вершины с номерами $j \geq j^*$, где j^* – начальная вершина младшего ребра дерева T_q , эти вершины могут находиться только ближе к конечным вершинам его поддеревьев. Следовательно, в свертке они относятся к ее младшим слагаемым, не влияющим на упорядоченность поддеревьев дерева T_q по не возрастанию их полустепеней исхода.

На примере канонического дерева T_7 со сверткой $0(1(3,4),256)$ проследим за упорядоченностью его допустимых вершин по не возрастанию полустепеней исхода после дополнения 6-м ребром.

Полустепени исхода корневых вершин поддеревьев дерева T_7 – это $d_1=2$ и $d_2=1$. Они упорядочены по не возрастанию. Допустимые вершины дерева T_7 – это 5 и 6. Свертки соответствующих деревьев T_8 – это $0(1(3,4),25(6,7))$ и $0(1(3,4),2567)$. В обоих вариантах T_8 $d_1=2$; $d_2=1$. Как видим, упорядоченность по не возрастанию их полустепеней исхода сохранилась. Подразумевается, что, если после присоединения нового ребра получается $d_1=2$; $d_2=2$, то это также означает сохранение упорядоченности по не возрастанию полустепеней исхода.

В алгоритме, приведенном ниже, использован лг порядок в алфавите $(0,1,2,\dots,q)$ на множестве слагаемых свертки и на множестве первых слева множителей этих слагаемых. Этот порядок соответствует лг порядку на соответствующих поддеревьях дерева T_q и на их корневых вершинах.

Исходные данные для алгоритма: свертка дерева T_q , номер начальной вершины его младшего ребра j^* , первоначальное множество допустимых вершин $J_q = \emptyset$. Для выявления допустимых вершин по свертке дерева T_q выполняем следующие шаги.

1. Исключаем из рассмотрения вершины с номером $j < j^*$ во всех слагаемых свертки дерева T_q .

2. Слагаемые свертки, которые соответствуют поддеревьям дерева T_q с корневыми вершинами 0,1,2 и т.д. просматриваем в порядке убывания их старшинства (здесь и далее под старшинством подразумевается

лексикографическое старшинство), проверяя каждое на симметричность предыдущему слагаемому. Методика проверки на симметричность слагаемых свертки рассмотрена в [9]. Вершины нестарших из симметричных слагаемых исключаем из рассмотрения.

3. Оставшиеся слагаемые свертки просматриваем на наличие в них s_1 -классов.

3.1. Если слагаемое свертки не содержит s_1 -классов, то множество J_q дополняем всеми его элементами.

3.2. Если слагаемое свертки содержит один s_1 -класс, то множество J_q дополняем его старшим элементом.

3.3. Если слагаемое свертки содержит более одного из несимметричных s_1 -классов (с различными размерами или количеством множителей перед ними), то добавляем к множеству J_q от каждого s_1 -класса его старший элемент.

3.4. Если слагаемое свертки содержат два или более симметричных s_1 -классов, то добавляем к множеству J_q старший элемент старшего s_1 -класса.

4. Если слагаемые свертки исчерпаны, конец.

В табл. 1 приведен пример вычисления списков множества $J_q = J_6$ допустимых вершин канонических деревьев $T_q = T_6$ для присоединения к ним 6-го ребра при переходе от них к каноническим деревьям $T_q = T_7$.

Таблица 1. Отбор по свертке допустимых вершин дерева T_6 для присоединения к нему 6-го ребра

№	Свертка дерева T_6	Слагаемые свертки	Вершины слагаемых свертки	j^*	Допустимые вершины поддеревьев	Допустимые вершины дерева T_6
1	0(1,2,3,4,5)	0(1,2,3,4,5)	0,1,...,5	0	0,1	0,1
2	0(15,2,3,4)	015	0,1,5	1	1,5	1,2,5
		0(2,3,4)	0,2,3,4		2	
3	0(1(4,5),2,3)	01(4,5)	0,1,4,5	1	1,4	1,2,4
		0(2,3)	0,2,3		2	
4	0((14,25),3)	014	0,1,4	2	4	3,4

		025	0,2,5		–	
		03	0,3		3	
5	0(145,2,3)	0145	0,1,4,5	4	4,5	4,5
		0(2,3)	0,2,3		–	
6	0(1(3,4,5),2)	01(3,4,5)	0,1,3,4,5	1	1,3	1,2,3
		02	0,2		2	
7	0(1(3,4),25)	01(3,4)	0,1,3,4	2	3	2,3,5
		025	0,2,5		2,5	
8	0(1(35,4),2)	01(35,4)	0,1,3,4,5	3	3,4,5	3,4,5
		02	0,2		–	
9	0(135,24)	0135	0,1,3,5	3	3,5	3,4,5
		024	0,2,4		4	
10	0(13(4,5),2)	013(4,5)	0,1,3,4,5	3	3,4	3,4
		02	0,2		–	
11	0(1345,2)	01345	0,1,3,4,5	4	4,5	4,5
		02	0,2		–	

Выделение допустимых вершин по рисунку дерева. В [9], как и в приведенном выше алгоритме, для вычисления допустимых вершин использованы алгебраические преобразования, скрывающие наглядность отбора таких вершин, что может затруднить его понимание. Ниже приведен наглядный метод определения допустимых вершин канонического дерева T_q , соответствующий рассмотренному алгоритму. Для его наглядности использовано свойство человеческого зрения легко распознавать симметричные поддеревья корневого дерева.

Исходные данные отличаются от рассмотренных выше только тем, что свертка заменена рисунком дерева. В остальном последовательность действий такая же, как в алгоритме, рассмотренном выше.

Условимся вершины дерева, исключенные из дальнейшего рассмотрения, выделять черным цветом. Это вершины, которые не могут быть допустимыми.

1. На рисунке дерева зачерняем все его вершины с $j < j^*$.

2. Поддеревья дерева просматриваем в порядке убывания лг старшинства их корневых вершин, проверяя каждое поддерево на симметричность предшествующему поддереву. Зачерняем вершины не старших из множества симметричных поддеревьев.

3. Оставшиеся поддеревья просматриваем на наличие в них ромашек.

3.1. Если в поддереве нет ромашек, множество J_q дополняем всеми номерами $j \geq j^*$ его вершин.

3.2. Если поддерево содержит одну ромашку, множество J_q дополняем номером j ее старшего лепестка при условии, что $j \geq j^*$.

3.3. Если поддерево содержит более одной ромашки, и они между собой не симметричны, множество J_q дополняем номерами j их старших лепестков при условии, что $j \geq j^*$.

3.4. Если поддерево содержит две или более симметричных ромашек, множество J_q дополняем номером j старшего лепестка старшей ромашки при условии, что $j \geq j^*$.

4. Если исчерпаны поддеревья дерева, выписываем множество J_q незачерненных вершин, которые являются допустимыми.

Рассмотрим примеры определения допустимых вершин по рисунку дерева T_q .

Пример 1. Исходное дерево $T_q = T_{15}$ приведено на рис. 1а.

1. Определяем по дереву $j^* = 9$. И зачерняем все вершины с номерами $j < j^* = 9$, как показано на рис. 1б.

2. В дереве два симметричных поддерева-плети. Дополнительно зачерняем вершины 9,14, которые принадлежат младшему поддереву.

3. В старшем поддереве с корнем 0 зачерняем не старшие вершины ромашки 11,12, оставшиеся пока не зачерненными.

4. Из рис. 1в находим: $J_q = (10,13)$.

Пример 2. Исходное дерево $T_q = T_{15}$ приведено на рис. 2а.

1. Определяем по дереву $j^* = 10$. И зачерняем все вершины с номерами $j < j^* = 10$, как показано на рис. 2б.

2. В дереве два симметричных поддерева с корнем 1. Зачерняем вершину 13 младшего из симметричных поддеревьев, оставшуюся не зачерненной. Результат показан на рис. 2в.

3. Ромашек нет в поддеревьях дерева.

4. $J_q = (10, 11, 12, 14)$.

Пример 3. Исходное дерево $T_q = T_{16}$ приведено на рис. 3а.

1. Определяем по дереву $j^* = 10$. И зачерняем все вершины с номерами $j < 10$, как показано на рис. 3б.

2. В дереве два симметричных поддерева с корнем 0. Зачерняем вершины 10, 14, 15 младшего из симметричных поддеревьев, оставшиеся не зачерненными.

В дереве два симметричных поддерева с корнем 4. Зачерняем вершину 13 младшего из симметричных поддеревьев, оставшуюся не зачерненной. Результат показан на рис. 3в.

3. Ромашек нет в поддеревьях дерева.

4. $J_q = (11, 12)$.

Пример 4. Исходное дерево $T_q = T_{16}$ приведено на рис. 4а.

1. Определяем по дереву $j^* = 8$. И зачерняем все вершины с номерами $j < 8$, как показано на рис. 4б.

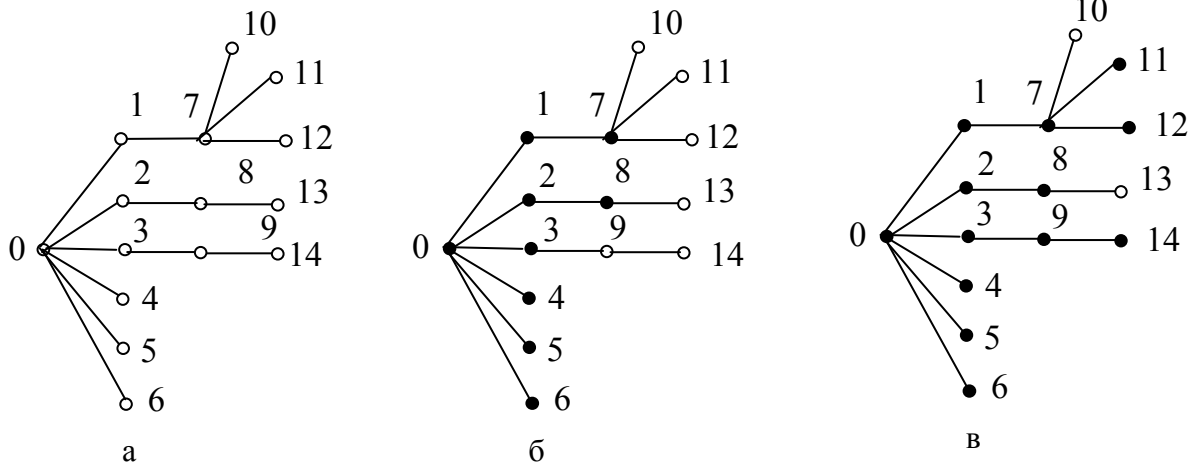


Рис. 1

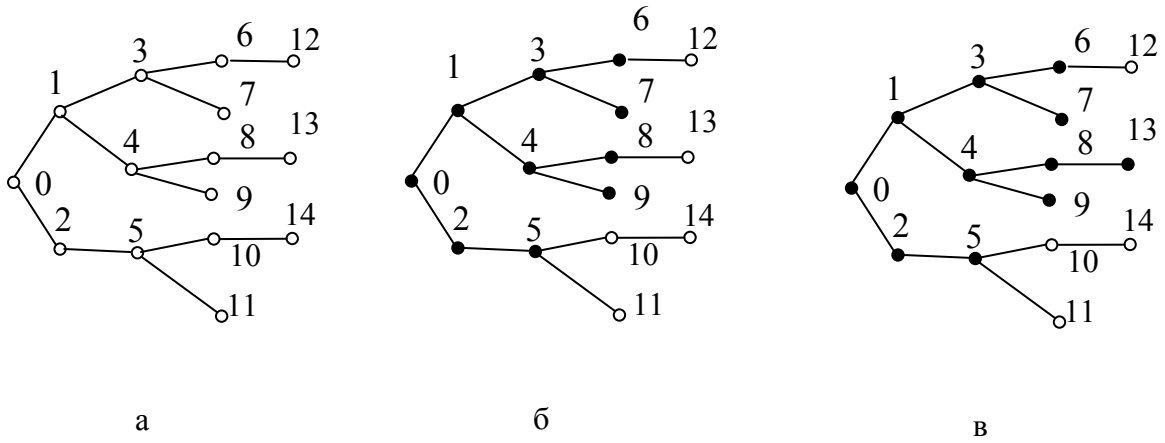


Рис.2

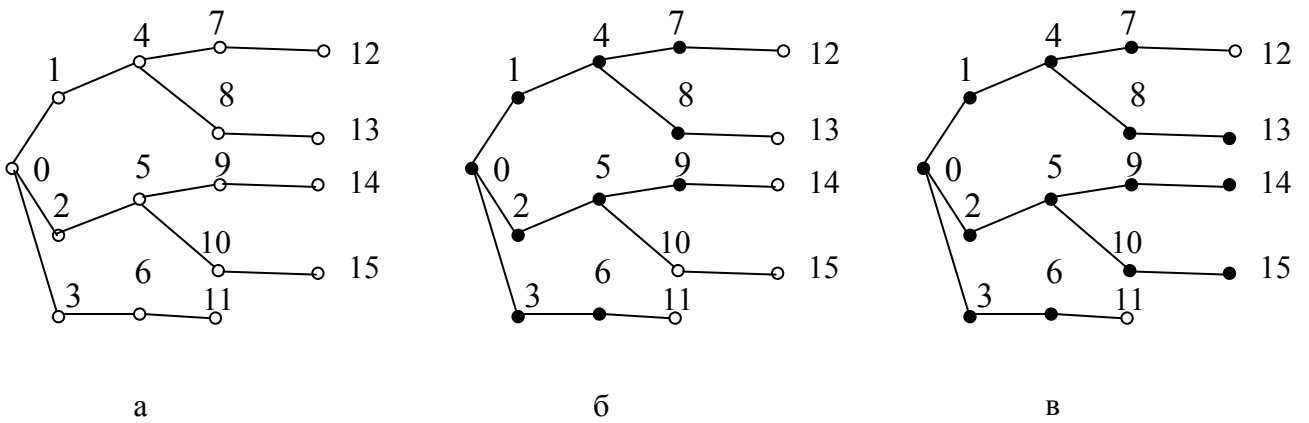


Рис. 3

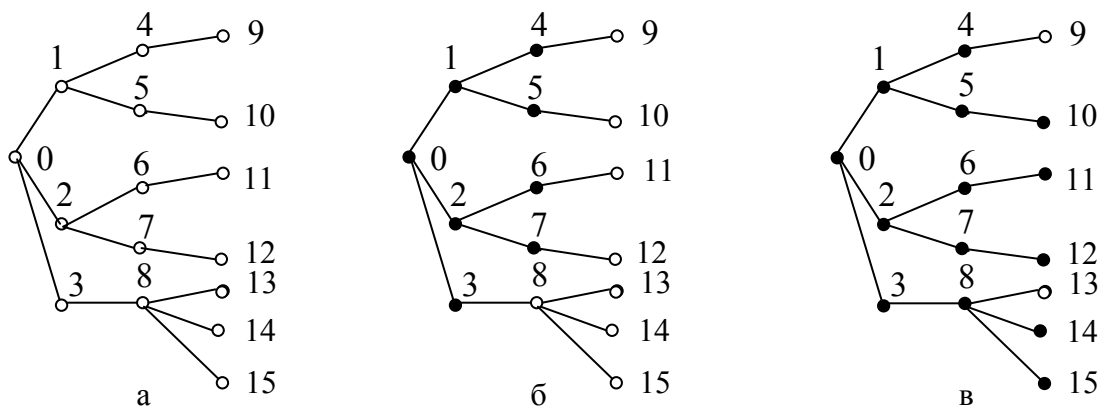


Рис.4

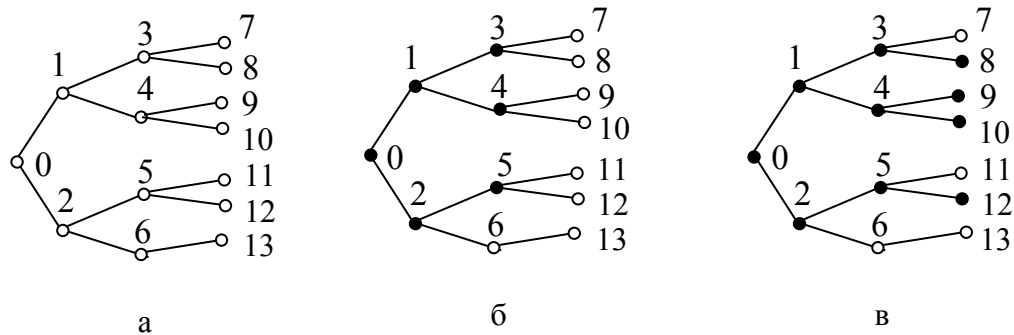


Рис. 5

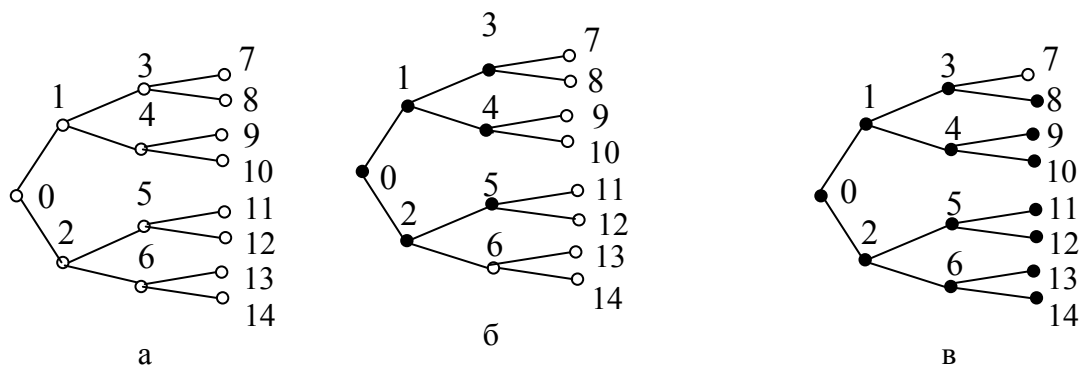


Рис. 6

2. В дереве два симметричных поддерева с корнем 0. Зачерняем вершины 11,12 младшего из симметричных поддеревьев, оставшиеся не зачерненными.

В дереве два симметричных поддерева с корнем 1. Зачерняем вершину 10 младшего из симметричных поддеревьев, оставшуюся не зачерненной.

3. В младшем поддереве с корнем 0 зачерняем не старшие вершины 14,15 ромашки, оставшиеся не зачерненными.

4. Результат показан на рис. 4в: $J_q = (9,13)$.

Пример 5. Исходное дерево $T_q = T_{14}$ приведено на рис.5а.

1. Определяем по дереву $j^* = 6$. И зачерняем все вершины с номерами $j < 6$, как показано на рис.5б.

2. В дереве два симметричных поддерева с корнем 1. Зачерняем вершины 9,10 младшего из симметричных поддеревьев, оставшиеся не зачерненными.

3. В поддеревьях с корнями 1 и 2 есть не симметричные между собой ромашки. Зачерняем их не старшие вершины 8 и 12.

4. Результат показан на рис. 5в: $J_q = (6,7,11,13)$.

Пример 6. Исходное дерево $T_q = T_{15}$ приведено на рис. 6а.

1. Определяем по дереву $j^* = 6$. И зачерняем все вершины с номерами $j < 6$ как показано на рис. 6б.

2. В дереве два симметричных поддерева с корнем 0. Зачерняем вершины 6,11,12,13,14 младшего из симметричных поддеревьев, оставшиеся не зачерненными.

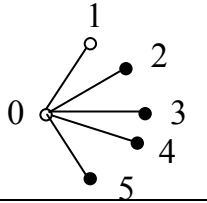
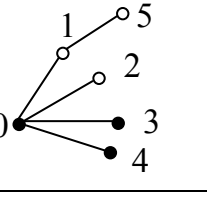
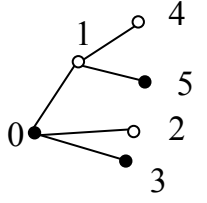
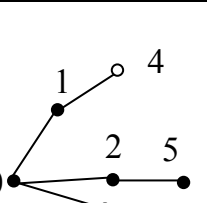
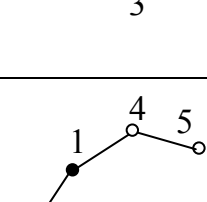
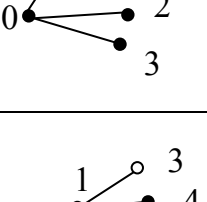
В поддереве с корнем 1 два симметричных поддерева. Зачерняем вершины 9,10, младшего из симметричных поддеревьев, оставшиеся не зачерненными.

3. В старшем поддереве с корнем 1 есть ромашка. Зачерняем ее не старшую вершину 8.

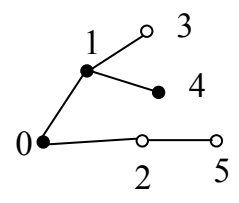
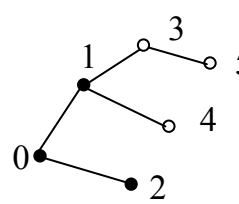
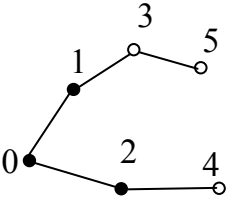
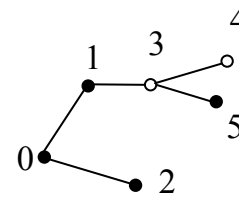
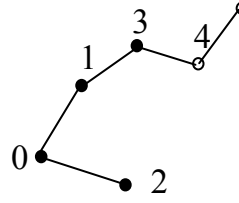
4. Результат показан на рис. 6в: $J_q = (7)$.

В табл. 2 показан отбор допустимых вершин всех канонических деревьев T_6 с 5 ребрами для присоединения к ним 6-го ребра при построении всего множества канонических деревьев с 6 ребрами. Здесь также применено визуальное определение симметрий каждого дерева T_q .

Таблица 2. Отбор по рисунку дерева допустимых вершин дерева T_6 для присоединения 6-го ребра

№	Дерево T_6	Поддеревья с корнем 0	Вершины поддеревьев	j^*	Допустимые вершины поддеревьев	Допустимые вершины дерева T_6
1		Ромашка	0,1,...,5	0	0,1	0,1
2		Плеть Ромашка	0,1,5 0,2,3,4	1	1,5 2	1,2,5
3		Поддерево с ромашкой Ромашка	0,1,4,5 0,2,3	1	1,4 2	1,2,4
4		Плеть Симметричная плеть Ребро	0,1,4 0,2,5 0,3	2	4 — 3	3,4
5		Плеть Ромашка	0,1,4,5 0,2,3	4	4,5 —	4,5
6		Поддерево с ромашкой Ребро	0,1,3,4,5 0,2	1	1,3 2	1,2,3

Окончание табл. 2

№	Дерево T_6	Поддеревья с корнем 0	Вершины под-деревьев	j^*	Допустимые вершины поддеревьев	Допустимые вершины дерева T_6
7		Поддерево с ромашкой Плеть	0,1,3,4 0,2,5	2	3 2,5	2,3,5
8		Поддерево без симметрий Ребро	0,1,3,4,5 0,2	3	3,4,5 —	3,4,5
9		Плеть Плеть	0,1,3,5 0,2,4	3	3,5 4	3,4,5
10		Поддерево с ромашкой Ребро	0,1,3,4,5 0,2	3	3,4 —	3,4
11		Плеть Ребро	0,1,3,4,5 0,2	4	4,5 —	4,5

Лексикографический порядок порождения неизоморфных корневых деревьев имеет неоспоримое преимущество перед перечислением по высоте – близкое к равномерному распределение производных деревьев, порождаемых от каждого из деревьев с меньшим числом вершин [1]. Это обеспечивает эффективную реализацию параллельных вычислений – равномерную загрузку процессоров и почти одновременное завершение их работы.

В случае перечисления по высоте от первых двух деревьев при добавлении ребра образуется всего по одному дереву, а добавление ребра к последнему по порядку дереву обеспечивает порождение почти всех деревьев с заданным числом вершин. Поэтому завершение многопоточного синтеза неизоморфных корневых деревьев будет ограничено производительностью последнего процессора.

Выводы

1. Разработан и обоснован алгоритм отбора вершин канонического дерева с q вершинами для построения канонических деревьев с $(q+1)$ вершинами, который является основным блоком программы синтеза неизоморфных корневых деревьев в лексикографическом порядке.

2. Показаны варианты отбора допустимых вершин, как с применением, так и без применения компьютера. Методика, ориентированная на визуальное применение отличается наглядностью и может быть использована в учебном процессе при изучении раздела о симметриях графов.

3. Предложенный алгоритм может быть применен при распараллеливании процесса синтеза корневых деревьев, поскольку предусматривает лексикографический порядок их перечисления [1, 8].

Список литературы

1. Филаретов В.В. Единый подход к синтезу неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2017. – Вып. 14. – С. – 168–185.– С. 177–194.

2. Otter R. The Number of Trees // The Annals of Mathematics.– 2nd Ser.– 1948.– Vol. 49, no. 3.– P. 583–599.
3. Kozina A.V. Coding and generation of nonisomorphic trees // Plenum Publishing Corporation. – 1980.– Translated from Kibernetika.– 1979.– N5.– P. 38–43.
4. Beyer T., Hedetniemi S. M. Constant time generation of rooted trees // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics: Computation.– 1980.– Vol. 9, no. 4.– P. 706–712.
5. Li G., Ruskey F. The advantages of forward thinking in generating rooted and free trees // ACM–SIAM symposium on Discrete algorithms.– 1999.– P. 939–940.
6. Nakano S.I., Uno T. Efficient generation of rooted trees // National Institute of Informatics: Technical Report: NII-2003-005E.–2003 (July).–P. 1–9.
7. Свирщёва Э.А. Структурный синтез неизоморфных систем с однородными компонентами. – Харьков, 1998. – 256 с. (2-е изд., перераб.– 2005. www.techlibrary.ru).
8. Свирщёва Э.А. Симметрии и построение неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2016. – Вып. 13. – С. 124–148.
9. Свирщёва Э.А. Представление корневых деревьев для их синтеза без изоморфных вариантов // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2017. – Вып. 14. – С.186–203.
10. Фараджев И.А. Конструктивное перечисление комбинаторных объектов. // Алгоритмические исследования в комбинаторике. М.: Наука, 1978. С.3–11.
11. McKay B.D. Isomorph-Free Exhaustive Generation / Computer Science Department, Australian National University.– Canberra, ACT 0200, Australia, 1997. – 19 с.

Свирщёва Эльвира Александровна – канд. техн. наук.

г. Харьков, Украина. E-mail: svirshchieva@mail.ru; olel@kharkov.ukrtel.net

СТРУКТУРНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ПОРОЖДЕНИЯ КАНОНИЧЕСКИХ КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЕВ ПРИ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОМ ПОРЯДКЕ

В. В. Филаретов

О двух направлениях в синтезе неизоморфных корневых деревьев. Корневые (иерархические) деревья являются наиболее часто используемыми в различных приложениях видом деревьев [1–3]. Особый интерес представляют неизоморфные (неповторяющиеся) корневые деревья [1]. Такое подмножество не включает вариантов, отличающихся только нумерацией вершин (подстановкой изоморфизма). Для этого типа структур формула для числа деревьев от числа вершин [4] определила судьбу последующей разработки алгоритмов перечисления [5–7].

По Оттеру деревья перечисляются в порядке, соответствующем равной высоте от корневой вершины [4]. Алгоритмы, разработанные с конца 70-х годов прошлого века и доведенные до компьютерных программ, имеют наиболее короткий код и высокое быстродействие [6, 7]. Альтернативное направление в синтезе неизоморфных корневых деревьев [1, 9, 10], развиваемое в последние годы [11–19], основано на лексикографическом порядке порождения [1, 9], для которого неизвестны перечислительные формулы.

Лексикографическое перечисление неизоморфных корневых деревьев. Лексикографические алгоритмы синтеза отличает многократно большая сложность, что проявляется в затратах соответствующих программ [16]. Вместе с тем лексикографическая последовательность неизоморфных корневых деревьев, показанная, например, для семи вершин на рис. 1 отличается регулярностью. Эстетически завораживает переход от дерева к дереву, когда идет разворачивание ромашки с шести лепестками в последовательность (путь, плеть) из шести ребер.

Однако решающим обстоятельством в пользу лексикографического порядка является то, что он позволяет легко разделять исходную задачу на вычислительные потоки по количеству неизоморфных деревьев с начальным числом вершин [16]. Эти потоки, в отличие от многопоточной

организации синтеза в порядке Оттера, имеют примерно одинаковую мощность, что обеспечивает равномерную загрузку процессоров и эффект параллельных вычислений [19].

При перечислении деревьев по высоте сложность исходной задачи сопоставима со сложностью первого потока, поэтому увеличение числа потоков не приводит к выигрышу из-за пиковой загрузки первого процессора. Соответствующая организация параллельных вычислений весьма сложна [8].

Определяющее преимущество лексикографического порядка (ЛГ-порядка) по сравнению с традиционным порядком синтеза неизоморфных корневых деревьев обуславливает интерес к повышению эффективности лексикографических алгоритмов в случае однопоточных вычислений, чему посвящена данная статья.

Вектор начальных вершин – лексикографический код дерева. Исходной посылкой при разработке алгоритмов синтеза является осмысление закономерностей порождения неизоморфных деревьев путем добавления вершины (ребра) к ранее найденным неизоморфным структурам. Исследование структурных особенностей порождения необходимо для воплощения логики перечисления в коде программы.

На рис. 1 показано образование 48 неизоморфных деревьев с 7 вершинами из 20 деревьев с 6 вершинами. Соответственно производные деревья разбиты на 20 групп с различным числом деревьев (3, 2 или 1). Каждое из деревьев группы имеет общий остов и одно ребро, отличающееся от других добавленных в этой группе ребер.

Каждое дерево характеризуется вектором начальных вершин (ВНВ). Конечные вершины ребер для всех деревьев одинаковы и являются натуральным рядом: 1, 2, ... N . Здесь N – число ребер дерева, $N+1$ – число его вершин, начиная с корневой вершины, имеющей номер 0.

Например, деревья с кодами: 000011, 000015, 000012 являются деревьями, производными от дерева с меньшим на единицу числом вершин: 00001. Учет этого обстоятельства позволяет рекурсивно наращивать неизоморфные корневые деревья до требуемого числа вершин [12], сократив код соответствующей программы и упростив ее отладку [15–18].

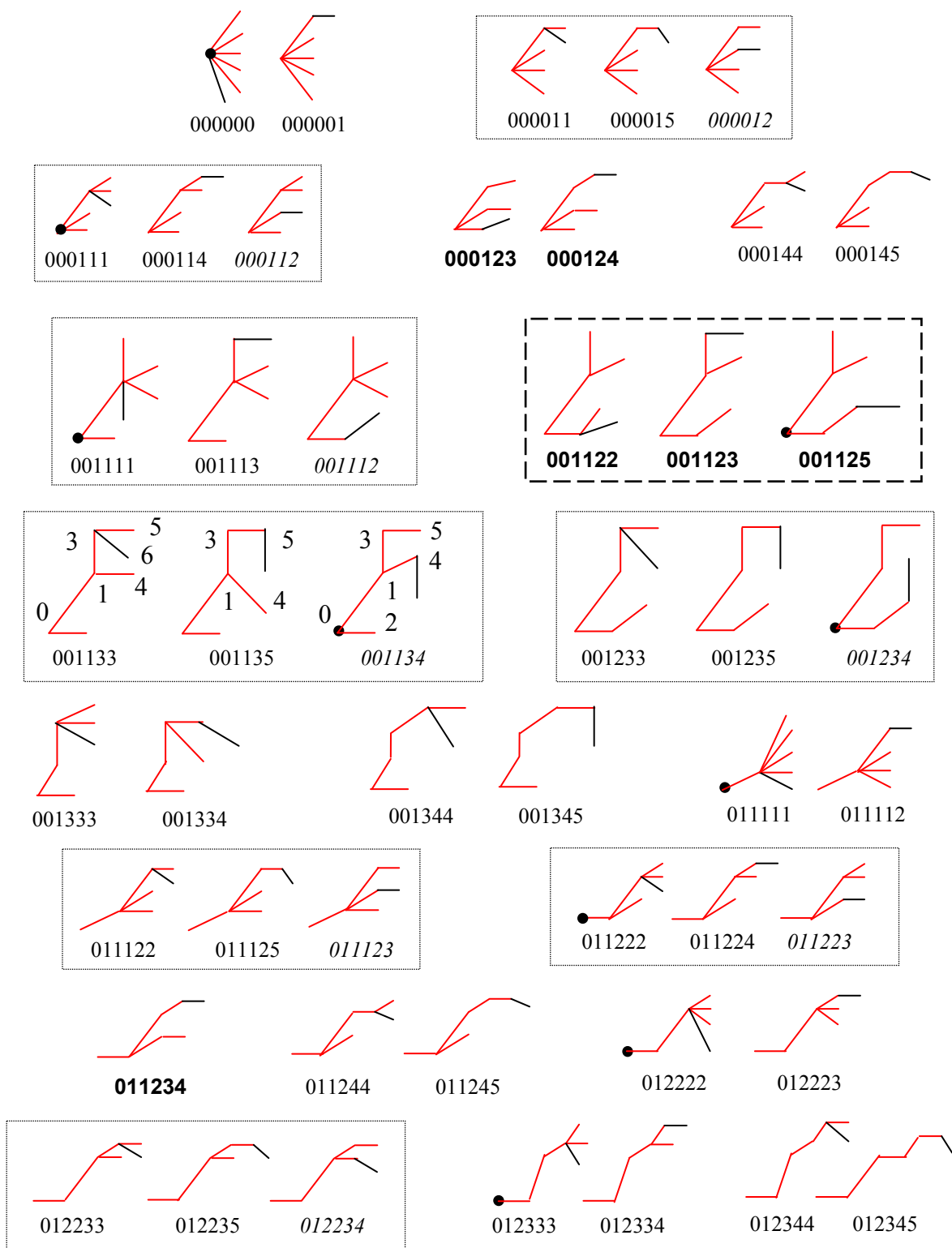


Рис. 1. 48 неизоморфных корневых деревьев с 7 вершинами. $48=2*17+8+6$:
 добавление лепестка к старшей ромашке (17) и наращивание ее старшего лепестка
 (17), завершение триады старшей ромашки –
 присоединение следующей по порядку вершины без проверки (8),
 другие деревья, образованные добавлением ребра (6).

Последовательность с одинаковыми номерами в коде дерева соответствует на рисунке дерева поддереву в виде «ромашки» – нескольких ребер, исходящих из вершины с этим номером. Например, последовательность: 0000 указывает на ромашку с четырьмя лепестками, исходящими из вершины с номером 0. В частном случае ромашка содержит один лепесток. Такие ромашки в корневом дереве образуют поддерево в виде пути из ребер, кратко называемого «плетью».

Рекурсивное наращивание деревьев по вершине называется синтезом. Перечисление (генерация) деревьев обычно предполагает получение некоторого множества комбинаций для заданного числа вершин с последующей выбраковкой избыточных комбинаций для оставления старших представителей изоморфных деревьев.

Вершины, разрешенные для добавления к коду при образовании производного дерева, составляют список допустимых вершин. Предварительное формирование такого списка позволяет избавиться от трудоемкой проверки комбинации в процессе добавления вершин. Однако затраты на формирование списка должны быть меньше затрат на проверку каноничности.

ЛГ-порядок предусматривает неубывание номеров в последовательности, что уменьшает число вершин ЛГ-кандидатов на добавление и упрощает задачу перечисления неизоморфных корневых деревьев. Перебор начинается с номера k_0 , равного номеру начальной вершины предыдущего добавленного ребра, и оканчивается на вершине N – размерности вектора VNB (num).

Триада старшей ромашки. Анализ последовательности порождения деревьев, показанной на рис. 1, позволяет судить об особой роли старшей и младшей ромашек. Если спускаться к корню по старшему (левому) лепестку старшей (левой на ярусе) ромашки, то никаких ответвлений влево не будет. Ответвление влево для любой из вершин прохождения делает ромашку младшей.

Проверка на старшинство ромашки k_0 выполняется в цикле:

```
small=0; k=k0;
while (k>1)
{
  If (num[k-1] != num[k-2]) k=num[k-1];
```

```

else small=1; break;
}

```

При выполнении условия $\text{num}[k-1] \neq \text{num}[k-2]$ для всех вершин на пути от ромашки к корню вершина k_0 является вершиной старшей ромашки. Если в этом цикле не было прерывания (break) или перехода на метку con, то ромашка является старшей (small=0). В случае досрочного прерывания цикла ромашка младшая (small=1).

В противном случае, если до корня включительно условие отсутствия разветвлений-ромашек не нарушается, ромашка старшая (small=0), Примеры триад старшей и младшей ромашек {000011, 000015, 000012} и {001122, 001123, 001125} соответственно на рис. 1.

Первый случай (small=0) позволяет без дополнительной проверки функцией testing [13, 18] включить в список допустимых вершин не только элемент k_0 , но и элемент j_1 , соответствующий продолжению старшего лепестка старшей ромашки. Этот элемент находится совсем просто:

```

for (k=N; k>0; k--) if (num[k-1]==k0) j1=k;

```

Кроме того, в случае старшей ромашки является безусловно допустимым следующий по ЛГ-порядку элемент k_0+1 , если он существует (не совпадает с j_1 : $k_0+1 \neq j_1$). Например, при наращивании дерева 00001 допустимой является триада вершин 1, 5, 2. Здесь $k_0=1$, $j_1=5$, а $k_0+1=2$. Последнее обстоятельство (с $k_0+1=2$) не является очевидным, и для меня стало удивительным, что при существовании старшей ромашки, после вершин k_0 и j_1 , можно добавлять вершину k_0 , причем без проверки testing. Получается, что вся эта триада вершин, порожденная старшей ромашкой, может включаться в list без трудоемкой проверки testing.

Дерево со старшей ромашкой всегда возглавляет одну из групп порожденных деревьев (рис. 1): 000000, 000011, 000111, 000144, 001111, 001133, 001233, 001333, 001344, 011111, 011122, 011222, 011244, 012222, 012233, 012333, 012344. Добавление младшего лепестка к старшей ромашке отражается дублированием последних двух вершин ВНВ.

Триада старшей ромашки может быть неполной, если следующий по ЛГ-порядку элемент k_0+1 совпадает с конечной вершиной старшего лепестка ромашки ($k_0+1=j_1$). Неполные триады старшей ромашки

содержат по два элемента. На рис. 1 это: {000000, 000001}; {000144, 000145}; {001333, 001334}; {001344, 001345}; {011111, 011112}; {011244, 011245}; {012222, 012223}; {012333, 012334}; {012344, 012345}.

Триада младшей ромашки. На рис. 1 единственная триада младшей ромашки выделена жирным штриховым контуром. Такая триада подобна триаде старшей ромашки за исключением того, что в триаде младшей ромашки добавление вершины k_0+1 допускается только в случаях, не нарушающих каноничности дерева. Например, для исходного дерева 0011223345569 производными деревьями являются деревья: 00112233455699 и 001122334556913. Дерево 001122334556910 не является старшим представителем изоморфных деревьев, полученных из дерева 0011223345569 добавлением вершины. На рис. 2 приведена указанная неполная триада младшей ромашки «99» исходного дерева 0011223345569 в наглядном ярусном представлении. Дерево, образованное добавлением вершины 10 зачеркнуто.

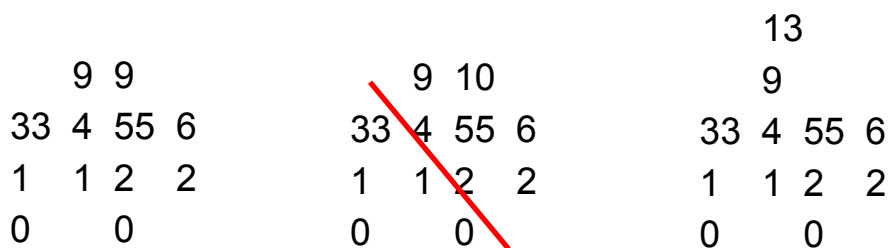


Рис. 2. Неполная триада младшей ромашки для исходного дерева 0011223345569 с 15 вершинами (производное дерево 001122334556910 – неканоническое)

На рис.1 подведен баланс порожденных деревьев: $48=2*17+8+2+4$. Из 48 деревьев для 7 вершин 44 дерева получается без testing по свойствам старшей и младшей ромашек, Проверке по testing подлежат только пять комбинаций: 000122, 000123, 000124, 001123 и 011234. При этом комбинация 000122 проверяется один раз при исследовании ромашки, затем исключается из списка вершин-кандидатов на добавление.

Однако при большом числе вершин доля деревьев, не связанных со старшими и младшими ромашками, резко возрастает (табл. 1), поэтому экономия времени по сравнению с программой addnode получается не слишком значительной.

Таблица 1. Распределения канонических корневых деревьев
при добавлении вершины к каноническим деревьям
с меньшим числом вершин

Число вер- шин	Вид ромашки				Группы деревьев без элемента k0
	старшая		младшая		
	k0 и старший лепесток	k0+1	k0 и старший лепесток	k0+1	
7	48				3
	34	8	2	1	
8	115				11
	74	19	8	3	
9	286				32
	168	46	30	10	
...	...				
21	35221832				5757845
	9108450	2797086	13351644	4206807	
22	97055181				16013410
	23719582	7305565	38019348	11997276	
23	268282855				44640685
	62040396	19160406	108238280	34203088	
24	743724984				124718221
	162925752	50442677	308140884	97497450	
25	2067174645				349143965
	429467186	133270716	877359824	277932954	

Деревья с плетями, нерегулярные по отношению к ромашкам. Особую группу деревьев (последний столбец табл. 1) составляют деревья, нерегулярные по отношению к ромашкам, которые завершаются последовательными ребрами (плетями). Пока не найдено признаков, которые позволили бы образовать из этих деревьев какие-то объединения, подобные триадам с ромашками.

ВНВ ни одного из этих деревьев не содержит двух элементов k0. Комбинации вершин, оканчивающиеся на два номера k0, оказываются неканоническими и бракуются. Например, на рис. 1 отсутствуют деревья: 000122 и 011233, но присутствуют следующие по порядку канонические деревья: 000123, 000124 и 011234 соответственно.

В табл. 2 нерегулярные канонические деревья разделены на два подмножества по признаку старшинства последней (добавленной) вершины. Старшая вершина продолжает крайне левую плеть (как 011234, 000123), а младшая – крайне правую. Младшая вершина может либо дополнять поддерево до симметрии предыдущему поддереву (как 000123), либо наращивать поддерево, несимметричное предыдущему поддереву (как 0011235).

Таблица 2. Распределения групп канонических корневых деревьев с плетями (без дублирующегося элемента k0)

Число вершин	Группы деревьев без элемента k0		
	Всего деревьев	Последняя вершина старшая	Последняя вершина младшая
7	3	000124 011234	000123
8	11	0000125 0001124 0001234 0011345 0011223 0012345 0111235 0122345	0000123 0011235 0111234
9	32	00000126 00001125 00001235 00011124 00011456 00011224 00011234 00012456 00111346 00112346 00133456 01111236 01112235 01112345 01122456 01122334 01123456 01222346 01233456	00000123 00001234 00011223 00011236 00011246 00111345 00111236 00112235 00112335 00112345 01111234 01122346 01222345
...
21	5757845	1824504	3933341
22	16013410	4846691	11166719
23	44640685	12908251	31732434
24	124718221	34471966	90246255
25	349143965	92279395	256864570

Повышение эффективности базовой версии программы addnode [18]. Установленные закономерности порождения канонических деревьев, связанные с образованием старших и младших ромашек, позволяют повысить эффективность программы рекурсивного наращивания по вершине в лексикографическом порядке [15, 16, 18, 19].

Идея улучшения алгоритма заключается в том, чтобы начать рекурсивный синтез с проверки вершины k_0 – первой вершины ЛГ-кандидата, которая дублирует предыдущую вершину. Если добавление k_0 не приводит к нарушению каноничности, то находится старшая вершина этой же ромашки j_1 . Эта вершина, как было показано ранее, может быть добавлена к исходному вектору num без проверки. Соответствующий фрагмент программы приведен ниже:

```
num[N]=k0;
if (!testing(N))
{
    for (k=N-2; k>=0; k--) if (num[k] != k0) break;
    j1=k+2;
    } else j1=-1;
if (j1!=-1) k0++;
```

Если вершина k_0 не может быть добавлена ($testing$ возвращает значение 1), то $j_1 = -1$ и ЛГ-список номеров, рассматриваемый в ходе добавления вершин, нужно начинать со следующего элемента $k_0 = k_0 + 1$.

Эксперименты с программой показали, что установление старшинства ромашки, несмотря на кажущуюся несложность процедуры весьма затратно. Эти затраты превышают затратам на использование процедуры $testing$, поэтому от безусловного (после соответствующей проверки) добавления элемента $k_0 + 1$ к вектору num пришлось отказаться.

Результативным оказалось другое улучшение базовой версии $addnode$, предусматривающее уменьшение числа проверяемых вершин путем учета ромашек на предпоследних ярусах наращиваемого дерева. Соответствующий фрагмент программы приведен ниже:

```

if (j!==-1 || j!==-1 && k!=k0)
{j=num[k-1];
for (i = k+1; i < N1; i++) if (num[i-1]==j) k++;
else break;}

```

Как следует из этого текста, если среди рассматриваемых вершин имеются вершины с общим истоком, то все такие вершины, кроме первой по порядку – старшей вершины с номером k – могут быть пропущены увеличением номера $k=k+1$.

Простой пример, иллюстрирующий такую возможность – исходное дерево 00133. После добавления вершины 4: 001334 ($k=4$) и перехода к следующей вершине $k=k+1=5$ приведенный выше фрагмент программы выполнит оператор $k=k+1$, что не допустит вершину 5 к проверке функцией `testing`.

Эксперименты показали, что такая простейшая проверка дублирования вершин на предпоследнем ярусе приводит к увеличению быстродействия программы примерно на 10%. Оба предлагаемых здесь усовершенствования: 1) учет старших и младших ромашек; 2) учет ромашек на предпоследнем ярусе обеспечивают увеличение быстродействия новой версии `addnode` на четверть по сравнению с базовой версией [18]. Результаты экспериментов приводятся в табл. 3.

Таблица 3. Сравнение предлагаемой и базовой [18] версий программы `addnode` при синтезе неизоморфных корневых деревьев с 21–25 вершинами

Число вершин	Версия с учетом старших и младших ромашек (время в секундах)		Базовая версия <code>addnode</code> [18] (время в секундах)		Экономия, в %
	Учет ромашек на предпоследнем ярусе	Без учета	Учет ромашек на предпоследнем ярусе	Без учета	
21	9	10	11	12	25,0
22	25	28	31	34	26,5
23	71	79	89	97	26,8
24	203	226	256	276	26,5
25	583	647	734	796	26,8

Исходный код предложенной версии программы addnode для рекурсивного синтеза неизоморфных корневых деревьев дан в приложении. Программа инициализируется операторами: num[0]=0; count=0; addnode(1). Здесь count – число канонических деревьев.

Выводы

1. Предложена классификация неизоморфных корневых деревьев при добавлении ребра (вершины) в лексикографическом порядке. В основу классификации положено подразделение деревьев на тройки (триады), относящиеся к старшим или младшим соединениям смежных ребер (ромашкам). Выделено три группы канонических деревьев: 1) триады деревьев для старших ромашек; 2) триады деревьев для младших ромашек; 3) деревья, не относящиеся к ромашкам, завершающиеся последовательными ребрами (плетями).

2. Установленные свойства старшей и младшей ромашки, проявляющиеся при добавлении ребер, позволяют частично избежать трудоемкой проверки проверяемых комбинаций на каноничность для повышения быстродействия программы синтеза канонических корневых деревьев в лексикографическом порядке (табл. 3).

3. Распределения канонических деревьев относительно старших и младших ромашек (табл. 1) сопоставимы по числу деревьев, что позволяет дополнительно распараллелить синтез производных деревьев для каждого начального канонического дерева [16, 19], добавив от 2 до 6 процессоров для синтеза подмножеств деревьев (табл. 1 и 2).

Приложение. Новая версия программы addnode для рекурсивного синтеза неизоморфных корневых деревьев

```
// сравнение поддеревьев, растущих из позиций p0 и p1 вектора num  
int subtre(int k,int p0,int p1);
```

```
// проверка каноничности дерева, заданного вектором num  
int testing(int N)
```

```
{ // num - вектор начальных вершин корневого дерева размерности N  
  // *pr=0 - выявлено старшее дерево, *pr=1 - комбинация бракуется
```

```

int l,N1=N+1;
for (l=N; l>0; l--) // обратный просмотр num для поиска ромашки
    { // начальные вершины поддеревьев найдены
        if (num[l]==num[l-1]) // 00122
            { if (subtre(N1,l,l+1)) return(1); }
        else // ромашка не найдена
            l=num[l]; // спуск к корню
    }
    return(0);
}

```

```

void addnode(int N)
{
int i,j,jl,k,N1=N+1,k0=num[N-1];

num[N]=k0;
if (!testing(N))
{
for (k=N-2; k>=0; k--) if (num[k] != k0) break;
    jl=k+2;
    } else jl=-1;
if (jl==--1) k0++;
for (k = k0; k < N1; k++)
{
num[N]=k;
if (jl != -1 && ( k==k0 || k==jl) || !testing(N))
{
if (N1 == Q)
{
if (fl_1st)
{for (i = 0; i < N1; i++) fprintf(file,"%d",num[i]);
        fprintf(file,"\n");}
count+=1;
} else addnod0(N1);
}
if (jl==--1 || jl!=--1 && k!=k0)
{j=num[k-1];
for (i = k; i < N; i++)
{if (num[i]!=j) break; k++;} } }}

```

Список литературы

1. Свирщёва Э.А. Структурный синтез неизоморфных систем с однородными компонентами. – Харьков, 1998. – 256 с. (2-е изд., перераб.– 2005. www.techlibrary.ru).
2. Chen I.M., Burdick J.W. Enumerating the non-isomorphic assembly configurations of modular robotic systems // *The International Journal of Robotics Research.*– 1998.– Vol. 17, no.7.– P. 702–719.
3. Ishikawa M., Yamanaka K., Otachi Y., Nakano S.I. Enumerating all rooted trees including k leaves // *The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers: Trans. Inf. & Syst.*– 2012.– Vol. E95-D, no. 3 (March).– P. 763–768.
4. Otter R. The Number of Trees // *The Annals of Mathematics.*– 2nd Ser.– 1948.– Vol. 49, no. 3.– P. 583–599.
5. Beyer T., Hedetniemi S. M. Constant time generation of rooted trees // *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics: Computation.*– 1980.– Vol. 9, no. 4.– P. 706–712.
6. Li G., Ruskey F. The advantages of forward thinking in generating rooted and free trees // *ACM–SIAM symposium on Discrete algorithms.*– 1999.– P. 939–940.
7. Nakano S.I., Uno T. Efficient generation of rooted trees // *National Institute of Informatics: Technical Report: NII-2003-005E.*–2003 (July).–P. 1–9.
8. Kubicka E.M., McKeon K.A. An application of level sequences to parallel generation of rooted trees // *Combinatorial mathematics and combinatorial computing.*– 2011.– N 76 (Feb).– P. 33–58.
9. Диниц Е.А., Зайцев М.А. Алгоритмы генерации неизоморфных деревьев // *Автоматика и телемеханика.*– 1977.– Вып. 4.– С. 121–126.
10. Kozina A.V. Coding and generation of nonisomorphic trees // *Plenum Publishing Corporation.*– 1980.– Translated from *Kibernetika.*– 1979.– N5.– P. 38–43.
11. Филаретов В.В. Алгоритмы перечисления неизоморфных корневых деревьев на основе лексикографического упорядочения // *Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.*– Ульяновск: УлГТУ, 2016.– Вып. 13.– С. 108–123.

12. Свирщёва Э.А. Симметрии и построение неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2016.– Вып. 13.– С. 124–148.

13. Недорезов М.В., Недорезов П.В., Филаретов В.В. Алгоритм и программа генерации неизоморфных корневых деревьев на основе векторов начальных вершин // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2016. – Вып. 13.– С. 149–162.

14. Недорезов П.В., Филаретов В.В. Применение двоичных кодов для генерации неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2016. – Вып. 13.– С. 163–174.

15. Недорезов П.В. Генерация неизоморфных корневых деревьев на основе двоичных кодов // МФТИ: XIX Международная конференция научно-технических работ школьников «Старт в Науку».– М.: МФТИ, 2017.– <http://abitu.net/conference/1637>

16. Филаретов В.В. Единый подход к синтезу неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.–Ульяновск: УлГТУ, 2017.– Вып.14.–С. 177–194.

17. Свирщёва Э.А. Представление корневых деревьев для их синтеза без изоморфных вариантов // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2017. – Вып. 14.– С. 195–213.

18. Недорезов М.В, Недорезов П.В., Филаретов В.В. Алгоритм синтеза неизоморфных корневых деревьев в лексикографическом порядке // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2017. – Вып. 14.– С. 214–225.

19. Недорезов П.В., Тимофеев В.Ф., Филаретов В.В. Параллельный синтез неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2017. – Вып. 14. – С. 236–244.

ОПТИМИЗАЦИЯ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА РЕКУРСИВНОГО СИНТЕЗА НЕИЗОМОРФНЫХ КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЕВ

П. В. Недорезов, В. Ф. Тимофеев, В. В. Филаретов

Традиционное направление разработки алгоритмов генерации и синтеза неизоморфных корневых деревьев – перечисление деревьев по высоте [1] – за два с лишним десятилетия привело к созданию эффективных и коротких по коду программ [2–4]. Тестирование этих программ, приведенных авторами на различных язык программирования, с переводом на один язык Си выполнено в работе [5].

Первый алгоритм синтеза неизоморфных корневых деревьев в лексикографическом порядке появился значительно позже – в 1998 году. Первые программы генерации и синтеза корневых деревьев в таком порядке появились лишь в 2016–2017 годах [9–11].

Приемлемой по быстродействию и конкурентоспособной программ [2–4] при параллельном (многопоточном) синтезе неизоморфных корневых деревьев является программа `addnode` [12, 14, 15]. Эта программа выполняет рекурсивное наращивание одного ребра до деревьев с заданным числом вершин.

Трудности изучения, сопровождения и модернизации программы `addnode` обусловлены сравнительно длинным кодом [14]. Очевидно, не нуждается в оптимизации недавний новый текст головной функции `addnode` [16], учитывающий структурные закономерности лексикографического порождения неизоморфных корневых деревьев, что позволило увеличить быстродействие программы примерно на четверть.

Целью настоящей статьи является преобразование текста `addnode` до его сокращения в несколько раз до объема, сопоставимого с объемом известных программ с перечислением неизоморфных корневых деревьев в порядке Оттера [1].

Оптимизация проверки каноничности дерева, порожденного добавлением вершины. В [16] приводится оптимизированный текст

функции `testing` для проверки каноничности дерева после добавления вершины (ребра).

```
// проверка каноничности дерева, заданного вектором num
int testing(int N)
{ // num - вектор начальных вершин корневого дерева размерности N
  // *pr=0 - выявлено старшее дерево, *pr=1 - комбинация бракуется
  int l, N1=N+1;
  for (l=N; l>0; l--) // обратный просмотр num для поиска ромашки
    { // начальные вершины поддеревьев найдены
      if (num[l]==num[l-1]) // 00122
        { if (subtre(N1,l,l+1)) return(1); }
      else // ромашка не найдена
        l=num[l]; // спуск к корню
    }
  return(0); }
```

Эта функция осуществляет наиболее сложную часть работы `addnode`, поскольку связана с поиском ромашки по спуску от добавленной проверяемой вершины и восстановлению пары поддеревьев (старшего и младшего), растущих из рассматриваемых лепестков ромашки `l` и `l+1`:

```
if (subtre(N1,l,l+1)) return(1);
```

Если последняя из добавленных вершин нарушает каноничность, то функция `subtre` возвращает значение 1, и добавленная вершина `num[N1-1]` бракуется. В противном случае продолжается цикл: `for (l=N; l>0; l--)`. Однако в этом нет смысла, если ромашка, из которой растут указанные поддерева является корневой (`ni=0`). Поэтому в приведенном выше тексте следует продолжить условный оператор следующим образом:

```
if (subtre(k,l,l+1)) return(1); else if (ni==0) return(0);
```

Таким образом, если до достижения корня добавление вершины не привело к нарушению каноничности, то предотвращается избыточная проверка предыдущей пары поддеревьев на каноничность – прерывается цикл: `for (l=N; l>0; l--)`. Это нововведение приведет к небольшому увеличению быстродействия программы.

Функцию `testing` можно сократить следующим образом:

```
int testing(int N)
```

```

{ // num - вектор начальных вершин корневого дерева размерности N
  // *rg=0 - выявлено старшее дерево, *rg=1 - комбинация бракуется
  int l,N1=N+1;
  for (l=N; l>0; l--) // обратный просмотр num для поиска ромашки
  { // начальные вершины поддеревьев найдены
    if (num[l]==num[l-1] && subtre(N1,l,l+1))
      return(1); }
    return(0); }

```

Программа будет работать корректно, но с многократно увеличенными затратами времени, что отражено в табл. 1.

Таблица 1. Результаты оптимизации программы addnode при синтезе неизоморфных корневых деревьев с 20–25 вершинами

Число вершин	Оптимизированная версия (время в секундах)		Базовая версия addnode [16] (время в секундах)		Экономия, в %
	Оптимизация addnode, включая [16]	Без учета else if (ni==0) return(0)	Изменения по [16]	С учетом else if (ni==0) return(0)	
20	2.6	2.6	3.0	3.0	13,3
21	7.4	7.4	8.4	8.5	11.9
22	21.1	20.8	24.1	24.3	12.4
23	59.6	59.2	68.5	68.2	13.0
24	167.9	168.9	195.9	194.1	14.3
25	481.6	481.9	560.6	557.5	14.1

Оптимизация функции восстановления старшего и младшего поддеревьев subtre. Исходный текст этой функции имеется в [14]. После оптимизации он выглядит следующим образом:

```

// Нахождение старшей вершины *p0 старшего или младшего поддерева
// на следующем (верхнем) ярусе
int firsec(int k,int *p0,int p1,int p10)
{ int i,m;
  for (m=p10;m<=k;m++)
    for (i=*p0;i<=p1;i++)
      if (i==num[m]) {*p0=m+1; return(1); } // вершина найдена
  return(0); // поддерево заканчивается на текущем ярусе
}

```

```

// сравнение поддеревьев, растущих из позиций p0 и p1 вектора num
int subtre0(int k,int p0,int p1)
{ int i,p10,pm10,b,pow0[30],pow1[30];
  while (p0 != p1)
  { // пока не равны старшие вершины старшего и младшего поддерева
    pm10=p1-p0; // число вершин у поддеревьев на текущем ярусе
    p10=pm10+p1; // граничная младшая позиция поддеревьев
    for (i=0;i<pm10;i++) {pow0[i]=0; pow1[i]=0;} // векторы полустепеней исхода
    for (i=p10; i<=k; i++) // старшего и младшего поддеревьев
      { b=num[i-1]; if (b >= p0 && b < p1) (pow0[b-p0])++;
        else if (b >= p1 && b < p10) (pow1[b-p1])++; }
    for (i=0; i<pm10; i++)
      if (pow0[i]<pow1[i]) return(1); // каноничность нарушается
      else if (pow0[i]>pow1[i]) return(0); // каноничность не нарушается
    p10--; // модификация младшей позиции для унификации firsec
    // нахождение старшей вершины p0 на следующем ярусе
    if (!firsec(k,&p0,p1,p10)) break; // для старшего поддерева
    else if (!firsec(k,&p1,p10,p10)) break; // для младшего поддерева
  }
  return(0); }

```

Как показывает табл. 1, резкое сокращение текста subtre не привело к столь же значительному увеличению быстродействию. Тем не менее, повышение эффективности программы является существенным (12–14%).

Экономия, обусловленная продолжением условного оператора в функции testing [else if (ni==0) return(0)], невелика на версии [16], либо вообще отсутствует (на предлагаемой здесь версии). Так происходит в результате ускорения процедуры проверки каноничности. Для сравнения заметим, что для первых версий addnode [11, 14] на 20 вершинах обеспечивалось ускорение на 8,4 % (!). При этом 12826228 неизоморфных корневых деревьев находились за 98,3 вместо 107,5 секунд.

Выводы: 1. Предложена новая редакция функции subtre для программы addnode, предусматривающая сравнение старшего и младшего поддеревьев по мере подъема с яруса на ярус корневого дерева. Это исключает хранение и использование векторов старших вершин для старшего и младшего поддеревьев, а также подсчет вершин на каждом ярусе этих поддеревьев. 2. Оптимизация привела к сокращению исходного

кода в 3–4 раза по сравнению с предыдущими версиями программы addnode, что повысило ее быстродействие на 12–14%.

Список литературы

1. Otter R. The Number of Trees // The Annals of Mathematics.– 2nd Ser.– 1948.– Vol. 49, no. 3.– P. 583–599.

2. Beyer T., Hedetniemi S. M. Constant time generation of rooted trees // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics: Computation.– 1980.– Vol. 9, no. 4.– P. 706–712.

3. Li G., Ruskey F. The advantages of forward thinking in generating rooted and free trees // ACM–SIAM symposium on Discrete algorithms.– 1999.– P. 939–940.

4. Nakano S.I., Uno T. Efficient generation of rooted trees // National Institute of Informatics: Technical Report: NII-2003-005E.–2003 (July).–P. 1–9.

5. Власенко Д.М., Нестеров А.А. Разработка и сравнение программ для генерации неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2017. – Вып. 14.– С.

6. Свирщёва Э.А. Структурный синтез неизоморфных систем с однородными компонентами. – Харьков, 1998. – 256 с. (2-е изд., перераб.– 2005. www.techlibrary.ru).

7. Филаретов В.В. Алгоритмы перечисления неизоморфных корневых деревьев на основе лексикографического упорядочения // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2016.– Вып. 13.– С. 108–123.

8. Свирщёва Э.А. Симметрии и построение неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.–Ульяновск:УлГТУ,2016.– Вып. 13.– С. 124–148.

9. Недорезов М.В., Недорезов П.В., Филаретов В.В. Алгоритм и программа генерации неизоморфных корневых деревьев на основе векторов начальных вершин // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2016. – Вып. 13.– С. 149–162.

10. Недорезов П.В., Филаретов В.В. Применение двоичных кодов для генерации неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и

диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2016. – Вып. 13.– С. 163–174.

11. Недорезов П.В. Генерация неизоморфных корневых деревьев на основе двоичных кодов // МФТИ: XIX Международная конференция научно-технических работ школьников «Старт в Науку».– М.: МФТИ, 2017.– <http://abitu.net/conference/1637>

12. Филаретов В.В. Единый подход к синтезу неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.–Ульяновск:УлГТУ, 2017.– Вып. 14.–С. 177–194.

13. Свирщёва Э.А. Представление корневых деревьев для их синтеза без изоморфных вариантов // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2017. – Вып. 14.– С. 195–213.

14. Недорезов М.В, Недорезов П.В., Филаретов В.В. Алгоритм синтеза неизоморфных корневых деревьев в лексикографическом порядке // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2017. – Вып. 14.– С. 214–225.

15. Недорезов П.В., Тимофеев В.Ф., Филаретов В.В. Параллельный синтез неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2017. – Вып. 14.– С. 236–244.

16. Филаретов В.В. Структурные закономерности порождения канонических корневых деревьев при лексикографическом порядке // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2018. – Вып. 15.

Недорезов Петр Владимирович – студент Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета – ЛЭТИ им. В.И.Ленина.

E-mail: pyatakry@rambler.ru

Тимофеев Владимир Федорович – инженер-конструктор 2 категории, Ульяновский филиал Конструкторского бюро Публичного Акционерного Общества "ТУПОЛЕВ" (ПАБ «Туполев»). Адрес: 432072, г. Ульяновск, Россия, пр-т Антонова, 1.

E-mail: v.f.timofeev@mail.ru

НЕЙРОСЕТИ И РОБОТОТЕХНИКА

СВОЙСТВА И ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕКУРРЕНТНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ КАК АППРОКСИМАТОРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Е. Б. Соловьева, А. Н. Агеев

Рассматриваются рекуррентные нейронные сети, выступающие в роли аппроксиматоров нелинейных операторов динамических систем. Нелинейные операторы устанавливают соответствие между множествами входных и выходных сигналов системы. В зависимости от расположения обратной связи выделяются разные типы рекуррентных сетей, для которых приводится описание структур, свойств и областей применения.

Recurrent neural networks that plays the part of the approximants of the nonlinear dynamic system operators are considered. Nonlinear operators establish a correspondence between the sets of input and output signals of a system. Depending on the feedback location, different types of recurrent networks are distinguished, for which the description of structures, properties and application areas is represented.

Рекуррентные нейронные сети решают множество задач в быстро развивающихся науке и технике. Примером использования рекуррентных нейронных сетей является аппроксимация нелинейных операторов в задачах идентификации, моделирования и синтеза динамических систем, которые удастся сформулировать в аппроксимационной постановке [1].

Рекуррентная нейронная сеть отличается от сети прямого распространения наличием, по крайней мере, одной обратной связи (ОС). ОС оказывают непосредственное влияние на обучение сетей и их производительность [2]–[4].

Выбор вида рекуррентной нейронной сети обусловлен практической задачей. Несколько видов сетей могут решать одинаковые задачи, но обеспечивать при этом разную точность и сложность решения. Рассмотрим классификацию рекуррентных сетей [5].

Вид ОС обуславливает деление рекуррентных нейронных сетей на глобально и локально рекуррентные сети. В глобально рекуррентных сетях допускаются ОС между нейронами одного слоя и разных слоёв. В локально рекуррентных сетях ОС присутствует только внутри нейронов.

В глобально рекуррентных сетях можно выделить четыре группы: 1) полносвязная рекуррентная сеть, называемая также рекуррентной сетью реального времени; 2) частично рекуррентные сети, к которым относятся сеть Элмана, Джордана, многослойный рекуррентный персептрон; 3) сети в пространстве состояний; 4) клеточные нейронные сети.

В локально рекуррентных сетях выделяются две группы моделей нейронов: 1) динамические нейроны, построенные на моделях с локальной ОС от выхода нейрона, от блока активации, а также с двумя петлями ОС; 2) блочно-ориентированные модели нейронов на базе структур Винера, Гаммерштейна, Винера-Гаммерштейна. Опишем структуры, свойства и области применения указанных видов нейронных сетей.

Полносвязная рекуррентная сеть (рис. 1).

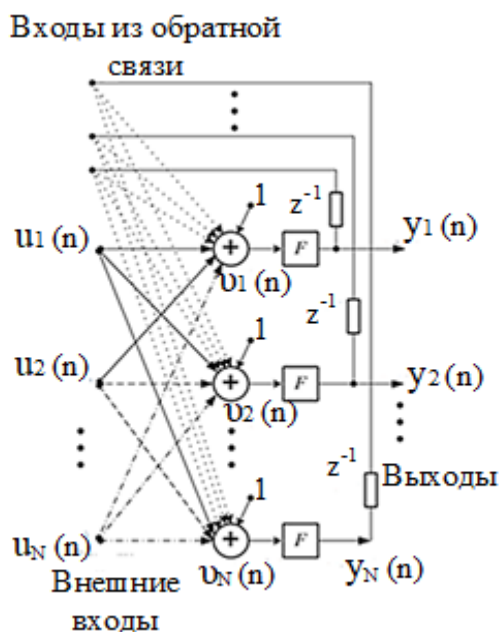


Рис. 1

Такая сеть предназначена для обработки сигналов в реальном времени. Однако обучение сети – сложное, медленно сходящееся к решению, возникают проблемы сохранения устойчивости сети.

Частично рекуррентные сети. Архитектура сетей основана на многослойном персептроне, включающем дополнительный слой (контекстный слой). Сигналы этого слоя описывают внутреннее состояние сетей. В отличие от полносвязных сетей, ОС более структурированы, что ускоряет обучение и повышает устойчивость.

К частично рекуррентным сетям относятся: сеть Элмана, Джордана, многослойный рекуррентный персептрон [5]. Сеть Элмана (рис. 2) характеризуется частичной рекуррентностью в виде ОС между скрытым и входным слоями [3]. Сеть Элмана часто применяется в системах управления движущимися объектами для исследования характеристик сигналов.

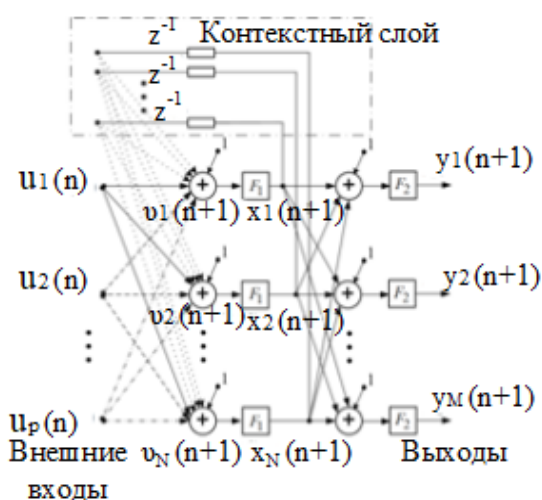


Рис. 2.

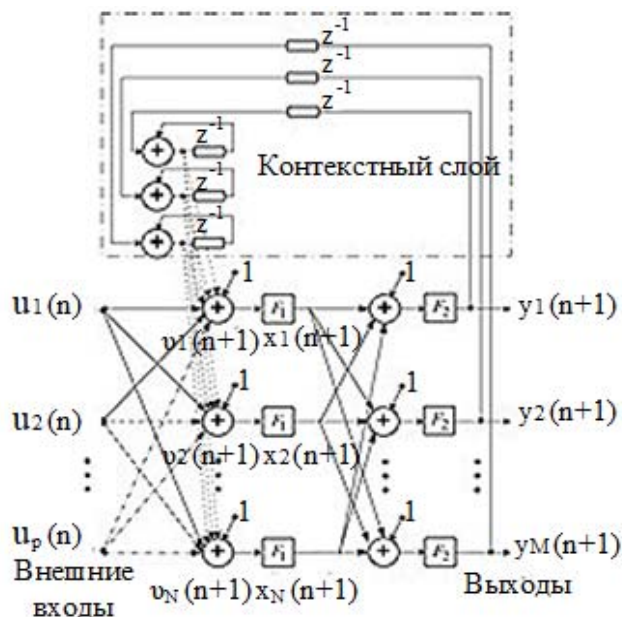


Рис. 3.

Сеть Джордана (рис. 3) решает тот же класс задач, что и сеть Элмана, однако обладает лучшими аппроксимирующими и предсказывающими свойствами благодаря глубокой памяти и дополнительному слою нелинейных функций активации [3]. Сеть

Джордана успешно применяется для распознавания, различения и классификации временных последовательностей.

Многослойный рекуррентный персептрон (рис. 4) – это персептронная сеть с добавленными ОС между соседними нейронами одного и того же скрытого слоя, а также с ОС нейронов на себя [2]–[4].

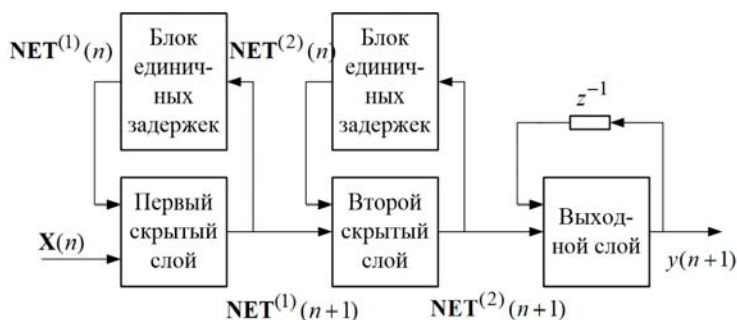


Рис. 4

Сети в пространстве состояний (рис. 5). Модели данных сетей описывают широкий класс нелинейных динамических систем. Достоинства сети: порядок сети не равен числу скрытых нейронов; сигналы, поступающие через обратную связь на вход цепи доступны для измерения или определения. Однако сеть имеет ряд недостатков: построение математической модели возможно на компактных подмножествах сигналов и на конечных временных интервалах; неточные начальные условия сети замедляют её обучение; возможно появление неустойчивости сети в процессе её обучения [2]–[4].

Клеточные нейронные сети (рис. 6). Параллельная обработка сигналов отличает эту сеть от остальных сетей и дает преимущество в быстром выполнении преобразований сигналов [5], [6]. Далее рассмотрим виды локально рекуррентных нейронных сетей.

Локально рекуррентные нейронные сети. *Динамическая модель с локальной связью от выхода нейрона* (рис. 7) лежит в основе сети Хопфилда [2]–[4], которая биологически реализуема в виде сетчатки глаза человека. Сеть используется как интерфейс между аналоговыми и цифровыми устройствами, а также как ассоциативная память.

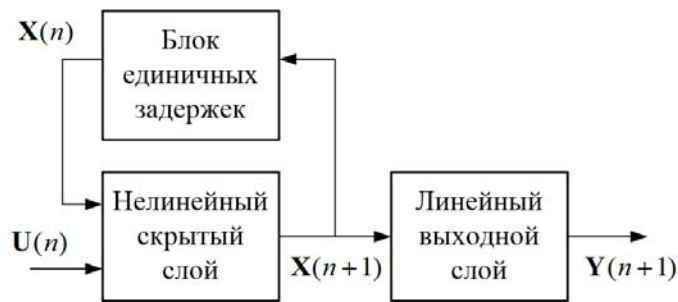


Рис. 5

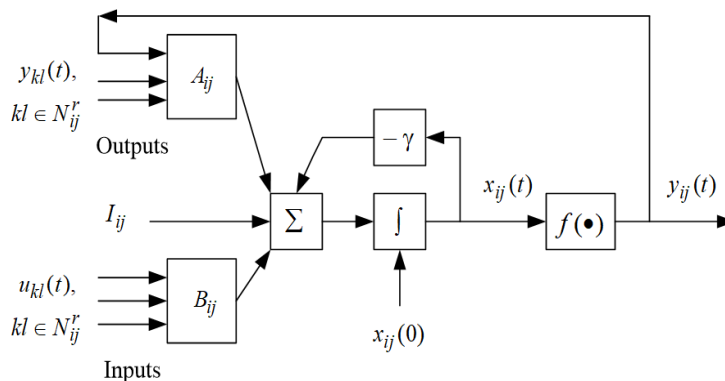


Рис. 6

Динамическая модель нейрона с локальной обратной связью от блока активации (рис. 8) имеет на входе комбинацию внешних воздействий и задержанных сигналов активации, входной сигнал блока активации поступает в обратную связь.

Динамическая модель нейрона с двумя петлями локальной обратной связи (рис. 9) содержит в ОС как состояния выходного сигнала, так и сигнала активации.

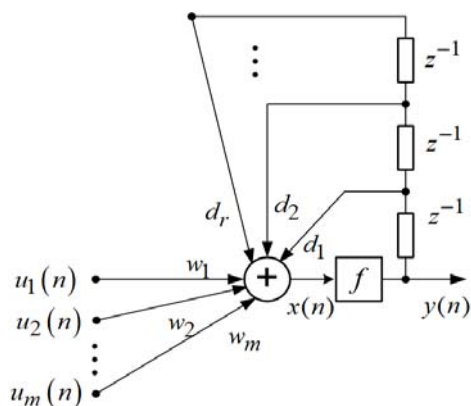


Рис. 7

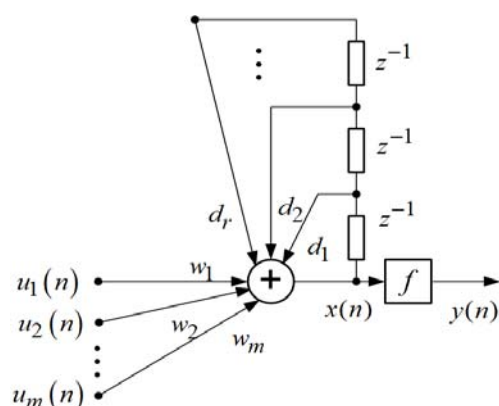


Рис. 8

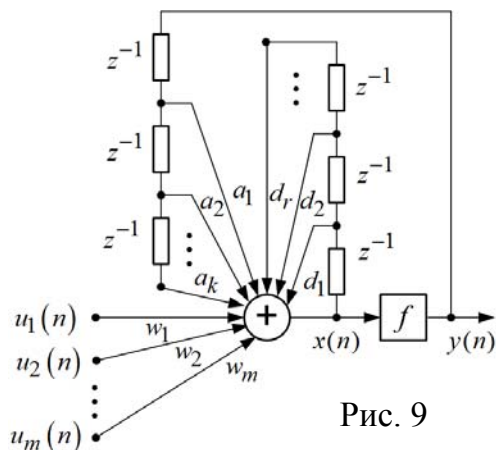


Рис. 9

Блочнo-ориентированные локальные рекуррентные сети строятся на базе структур: 1) Винера (линейная динамическая цепь (ЛДЦ) и безынерционная нелинейность (БН)); 2) Гаммерштейна (БН и ЛДЦ); 3) Винера–Гаммерштейна (входная ЛДЦ, БН и выходная ЛДЦ).

Вывод. Рассмотрены рекуррентные нейронные сети, позволяющие без потери точности строить более простые нелинейные динамические системы, чем с помощью других типов нейронных сетей: многослойных прямого распространения, радиально-базисных, функционально-связанных и сплайновых [1]–[4].

Список литературы

1. Модели нелинейных систем. Полевые методы электродинамики / С. А. Дегтярев, Ю. М. Иншаков, Е. Б. Соловьева, В. В. Федоров. – СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2016.– 164 с.
2. Хайкин С./ Нейронные сети: полный курс. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2006.– 1104 с.
3. Осовский С. Нейронные сети для обработки информации. – М.: Финансы и статистика, 2002.– 304 с.
4. Бодянский Е.В., Руденко О.Г. Искусственные нейронные сети: архитектуры, обучение, применения. – Харьков: ТЕЛЕТЕХ, 2004.– 369 с.
5. Соловьева Е.Б. Рекуррентные нейронные сети в качестве моделей нелинейных динамических систем // ЦОС.– 2018.– № 1.– С.18–27.
6. Chaos, CNN, Memristors and Beyond. A Festschrift for Leon Chua / Ed.: A. Adamatzky, G. Chen. – New York: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2013.

Соловьева Елена Борисовна – д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой ТОЭ, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет.
Тел.: (812) 346–17–96, selenab@hotmail.ru

Агеев Александр Николаевич – студент Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета.
Тел.: (812) 346–17–96, Alexandr1997ag@mail.ru

ЛОКОМОТОРНЫЕ ФУНКЦИИ ЖИВЫХ ОРГАНИЗМОВ И РОБОТОВ

Е. Б. Соловьева, М. А. Ситников

Управление локомоцией (перемещением) робототехнических систем строится на основе принципов, заимствованных у живой природы. Изучение локомоторных функций живых организмов важно для организации и управления локомоцией роботов. В работе рассматриваются основные аспекты локомоции, назначение и структуры центральных генераторов ритмов, формирующих последовательности импульсов для координаций движений конечностей.

The control of the locomotion (movement) of robotic systems is based on principles borrowed from animate nature. The study of the locomotor functions of living organisms is important for organizing and controlling the robots locomotion. The main aspects of locomotion, the purpose and structures of central pattern generators that form rhythmic impulse sequences for the coordination of the limb movements are represented.

В процессе эволюции техники и стремлении человека автоматизировать производство активно развивается робототехника, поскольку роботы облегчают труд человека, выполняют задачи ему непосильные, а также способны работать в опасных и экстремальных условиях. В робототехнических системах важно добиться четких и слаженных движений механизмов, а именно, последовательности и точности в передвижении (локомоции) и манипуляции [1]. Локомоция робототехнических систем основана на бионических (заимствованных у живой природы) способах передвижения. Следовательно, изучение локомоторных функций живых организмов является основой для проектирования роботов.

Локомоция – совокупность согласованных (координированных) движений, с помощью которых происходит передвижение. Разновидностями локомоции являются ходьба, плавание, полет и др.

Локомоция и манипулирование являются двумя категориями поведения. Навыки и элементы интеллекта могут сформироваться при решении задач, характерных для этих категорий.

Выделяют пять типов локомоции [2]: 1) движение при помощи жгутиков или ресничек; 2) амебоидное движение, выполняемое путем изменения формы тела; 3) волнообразное движение; 4) реактивное движение; 5) движение при помощи конечностей.

Перемещение живого существа посредством координированных движений «запрограммировано» на уровне спинного мозга. Болевое раздражение какой-либо конечности спинального животного порождает рефлекторные движения других конечностей (рис. 1). В случае стимуляции могут возникнуть ритмичные сгибательные и разгибательные движения не подвергшихся раздражению конечностей [2].

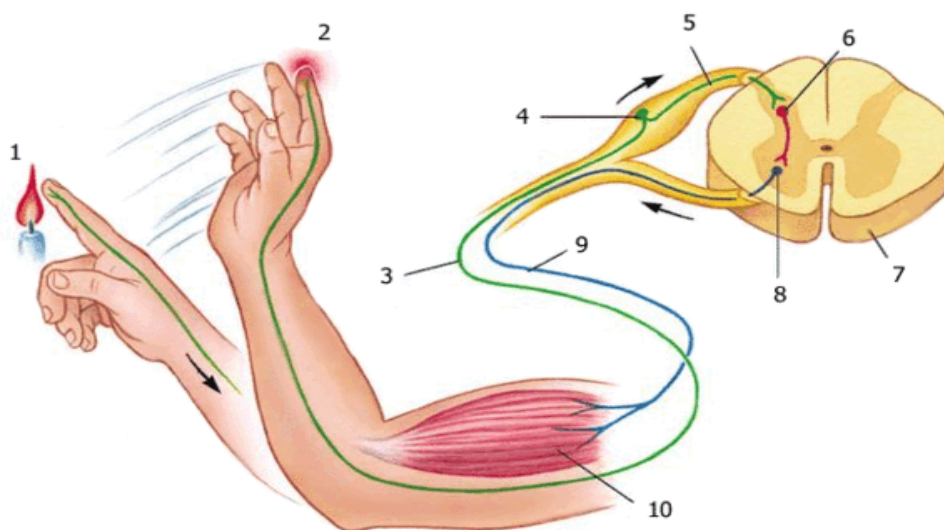


Рис. 1. Эффект раздражения конечности

Локомоция делится на естественную (сигнал от спинного мозга вызывает реакцию-движение), и ложную (такая реакция не появляется). Локомоцию живых существ порождают крупные нервные клетки – мотонейроны. Мотонейроны боковой части переднего рога головного мозга снабжают своими аксонами мышцы конечностей, а средней части переднего рога – осевые мышцы (рис. 2).

Организация (программа) локомоторной активности создается центральными генераторами ритмов (ЦГР, central pattern generator). ЦГР –

это совокупность взаимосвязанных нейронов, способных генерировать основную картину моторного выхода, лежащего в основе ритмичных движений (дыхание, локомоция, жевание, глотание и т.п.) при отсутствии афферентных сигналов от исполнительного двигательного аппарата.

ЦГР делятся на истинные генераторы, активные на протяжении всей жизни, например, генераторы дыхательного и сердечного ритма, и условные, контролирующие эпизодические движения, например, жевание. Моторный выход генераторов определяется их внутренней организацией. Активность условных генераторов инициируется командой из высших центров. Генераторы локомоторного цикла активируются головным мозгом. Инициатор локомоции – локомоторный центр среднего мозга [2].

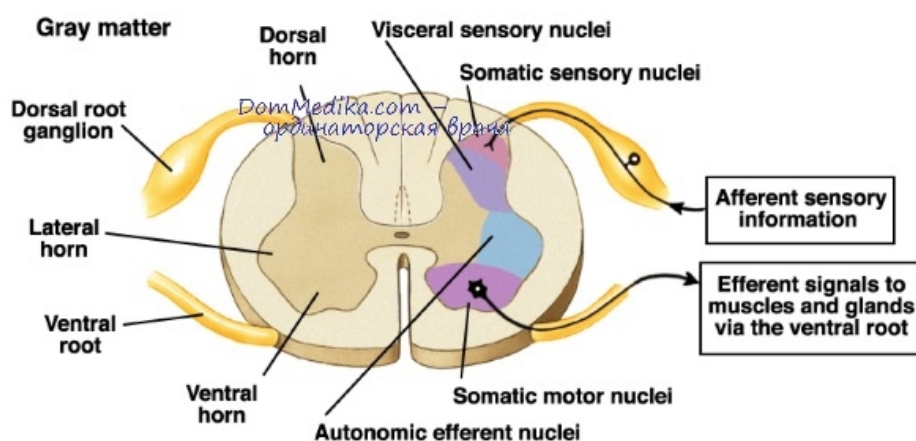


Рис. 2. Структура мотонейрона

Структурно-функциональная организация ЦГР живых существ задана генетически. Она формируется эмбриогенезом и не нуждается в обучении для начала функционирования. ЦГР имеют две структуры: 1) использует нейроны-ритмоводители (пейсмейкерные сети, pacemaker networks); 2) опирается на взаимодействующие клетки, лишенные собственной пейсмейкерной активности (сетевые осцилляторы, network oscillators). В обоих случаях клетка способна генерировать высокочастотные разряды потенциалов действия (плато потенциалов), сопровождаемые их полным прекращением и последующим возобновлением через интервал времени. Фактически имеет место постоянное чередование де- и гиперполяризации клеточной мембраны [3].

Существенный вклад в регуляцию работы ЦГР вносит сенсорная информация из отростков чувствительных нейронов с периферии. Значимость обратной связи для функционирования живой системы была оценена только с развитием кибернетики. Обратная афферентация превратила «разомкнутую» рефлекторную дугу в «замкнутую» рефлекторную петлю, что положило начало теории функциональных систем [4]. Медленные типы движений проще корректировать со стороны сенсорных входов, чем быстрые. В частности, подобные отношения характерны для ЦГР дыхания (информация с рецепторов необходима для окончания фазы вдоха) и медленной локомоции у позвоночных. Проблема взаимодействия нервных центров заключается в понимании причин и механизмов поведения животных. Ограниченный набор реакций в момент времени подтверждает работу или угнетение нейронных сетей и/или нервных путей.

Вывод. Дальнейшее развитие концепции центральных генераторов ритма позволяет лучше понять зависимость активности живых систем от внешних условий, важный для систем управления в робототехнике [1].

Список литературы

1. Юревич Е. И. Основы робототехники: Учеб. пособие. – СПб.: Изд-во БХВ-Петербург, 2018.
2. От нейрона к мозгу / Дж. Николлс, Р. Мартин, Б. Валлас, П. Фукс. – М.: Едиториал УРСС, 2003.
3. Аршавский Ю. И., Делягина Т. Г., Орловский Г. Н. Центральные генераторы: механизм работы и их роль в управлении автоматизированными движениями // Журнал высшей нервной деятельности.– 2015.– Т. 65, № 2.– С. 156–187.
4. Наута У., Фейртаг М. Мозг. – М.: Мир, 1982.

Соловьева Елена Борисовна, д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой ТОЭ, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет. Тел.: (812) 346–17–96, selenab@hotmail.ru

Ситников Максим Алексеевич, студент Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета. Тел.: (812) 346–17–96, maximys.97@mail.ru

ИЗ ОПЫТА РАБОТЫ

РАЗРАБОТКА И ЭКСПЛУАТАЦИЯ ОФИСНОЙ СОЛНЕЧНОЙ ЭЛЕКТРОСТАНЦИИ

Н. П. Кузьмин, А. А. Маркелов

Рассмотрены особенности реализации и работа солнечной электростанции, установленной в городском офисе. Дана характеристика электростанции за десятилетний период эксплуатации. Обсуждены перспективы солнечной энергетики.

The features of the implementation and operation of the solar power plant installed in the city office are considered. The characteristic of power plant for ten-year period of operation is presented. The prospects of solar energy are discussed.

Офисная солнечная электростанция: 10 лет спустя. В июле 2009 года для офиса ООО «Спецмонтажсервис» была смонтирована «солнечная» электростанция, состоящая из фотоэлектрической панели 100 Вт, аккумулятора 12 В 200 А*ч, инвертора =12В/~220В и контроллера заряда [1]. Основной целью было обеспечить бесперебойное питание компьютеров при частых аварийных отключениях электроэнергии.

Уже через полтора-два года электростанция обрела статус необходимого члена коллектива, подающего признаки жизни непрерывной работой счетчиков. Электроснабжение офиса стало стабильным, и «солнечная» станция выполняла только функцию экономии электроэнергии.

Стабилизация процесса эксплуатации станции затянулась из-за четырехмесячного простоя, вызванного ремонтом неудачного аккумулятора. В 2010 году, через полгода после начала эксплуатации, вышла из строя одна банка аккумулятора LEOCHDJM 12200 Leoch Battery Co (Китай).

После замены, аккумулятор того же типа продолжает работать по сей день. Других отказов почти за 10 лет эксплуатации электростанции не было. Нарботка энергии (по электросчетчику) по месяцам в период «вработывания» станции представлена в табл.1 [1].

Таблица 1. Нарботка электроэнергии по месяцам в киловатт-часах

Месяцы	Годы		
	2009	2010	2011
Январь		2,7	3,3
Февраль		4,0	7,0
Март		замена аккумулятора	7,9
Апрель		замена аккумулятора	4,8
Май		замена аккумулятора	6,3
Июнь		замена аккумулятора	4,4
Июль		6,1	8,9
Август	5,1	8,0	7,3
Сентябрь	6,6	3,5	4,4
Октябрь	6,1	2,8	
Ноябрь	0,9	1,6	
Декабрь	2,4	1,4	

Структура солнечной электростанции. Электростанция состоит из следующих элементов:

1. Фотоэлектрическая панель (солнечная панель) IS-130-12 размером 1490x670x39 мм, 6 рядов по 12 элементов, максимальная мощность 130 Вт, выходное напряжение 17 В. Производство России, Зеленоград. Розничная цена 18850 рублей.

2. Гелевая аккумуляторная батарея LEOCHDJM 12200, 12 вольт, емкостью 200 ампер часов. Производство Китай. Розничная цена 14500 рублей.

3. Контроллер заряда батареи MorningstarProStar на ток заряда 15 ампер. Производство США, MorningstarCorp. Розничная цена 6600 рублей.

4. Инвертор синусный 12 вольт/220 вольт Powersine 1600-12 (номинальная мощность 1300 ватт/ максимальная мощность 1600 ватт не

более 10 минут). Производство TBS-Elektronics (Голландия). Розничная цена 31000 рублей.

5. Электросчетчик активной энергии переменного тока ЛЕЙНЕ ЭЛЕКТРО-01 1МШ1. Производство Россия, Саранск. Розничная цена 370 рублей.

Окончательная стоимость с учетом доставки оборудования, скидки, цены на кабели и монтажные материалы составила 70000 рублей. Электрическая схема «солнечной» электростанции показана на рис.1 [1].

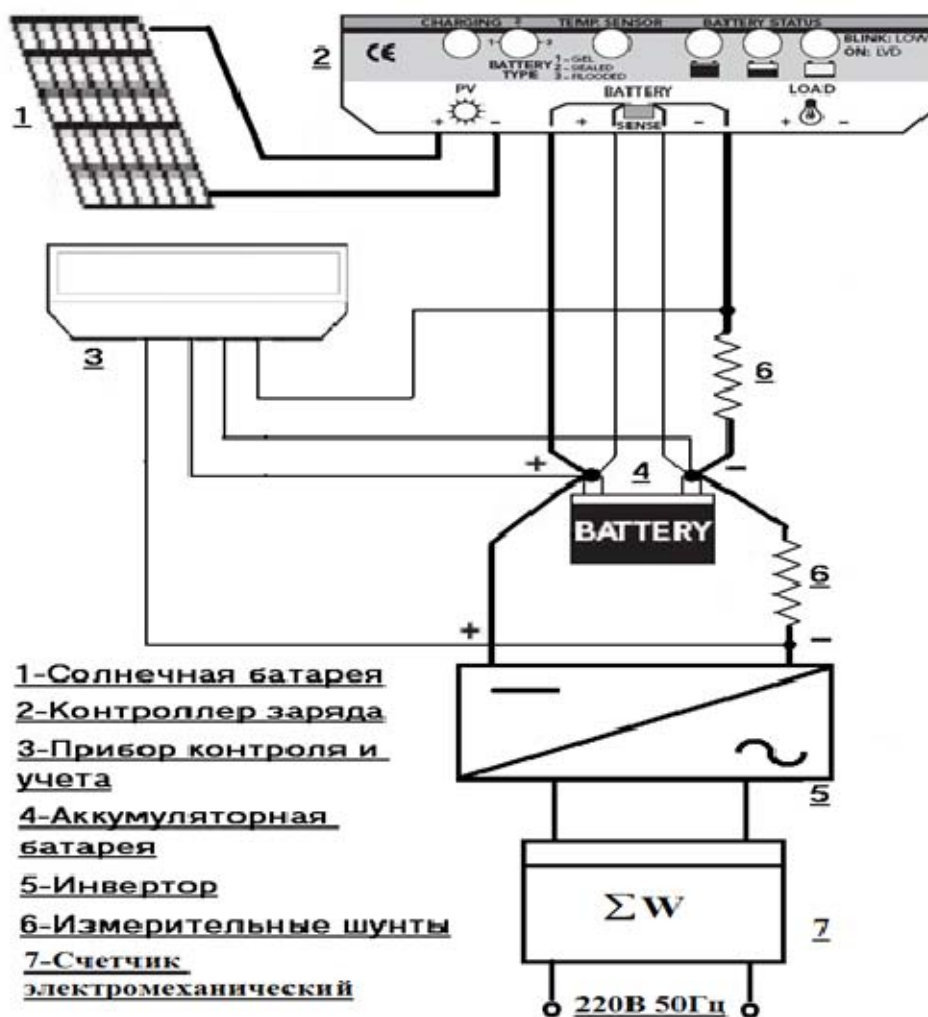


Рис.1. Электрическая схема «солнечной» электростанции

Особенности установки солнечной панели. Эта операция, очевидно, является важнейшей. Солнечная панель была смонтирована на южной стене здания таким образом, что нормаль к плоскости панели по азимуту направлена на юг, а угол места нормали (возвышение над

горизонтом) равен углу осеннего (весеннего) солнцестояния в полдень. Для широты Ульяновска этот угол примерно 35 градусов.

На наш взгляд, это компромисс, позволяющий выровнять среднегодовую освещенность панели и получить максимальную освещенность (и выработку электроэнергии) два раза в год весной и осенью.

Большую среднегодовую освещенность солнечной батареи можно получить, только производя сезонную коррекцию угла места и суточную коррекцию азимута нормали. Другими словами, придется поворачивать батарею за солнцем. Однако это потребует дополнительных затрат, снизит надежность за счет добавления подвижных элементов привода, и вдобавок нереализуемо при установке панели на вертикальных стенах.

В целях удешевления эксплуатации офисной солнечной электростанции мы отказались от установки привода, следящего за суточным и сезонным движением Солнца.

Для эффективной работы фотоэлектрическая панель установлена на стене дома под углом 55 градусов от горизонтали. Зимой на панели скапливается снег. Занесение снегом панели хотя бы на 30% по площади приведет к прекращению генерации. Поэтому необходима своевременная очистка. В большинстве случаев это трудоемкое занятие, так как требует либо лестницы, либо альпинистского снаряжения для работы на стене дома.

Вертикальная установка фотоэлектрической панели (плашмя на стену) позволит устранить проблему со снегом и чисткой, но генерация уменьшится примерно на 20% ($\cos(90-55)$). Если смирится с этой потерей и установить панель вертикально, то «солнечная» электростанция вообще не потребует никаких затрат и обслуживания кроме подтяжки винтов в клеммах кабельных соединителей.

Функционирование солнечной электростанции. Работа электростанции совершается следующим образом. При полной зарядке аккумулятора (напряжение на клеммах аккумулятора 14,1 вольт), утром вручную включался инвертор с подключенной нагрузкой (два компьютера, ноутбук, лазерный принтер), суммарной мощностью около 350-400 ватт. Отключение выполняется вечером – в конце рабочего дня –

вручную, либо автоматически инвертором при разряде аккумулятора до 11,5 вольт.

В безоблачную погоду такое включение производилось каждый четвертый день, иначе чтобы восстановить израсходованную из аккумулятора в течение одного дня электроэнергию, одной солнечной панели мощностью 130 ватт необходимо три дня.

Электрическая энергия, отданная потребителям, фиксируется электромеханическим счетчиком. В состав электростанции входит также прибор контроля и учета, который измеряет ток солнечной батареи (ток заряда аккумулятора), ток нагрузки (ток разряда аккумулятора), напряжение аккумулятора. Измерения этих величин производятся каждые 10 секунд, круглосуточно. Массив данных переносится на персональный компьютер в формате Excel.

Выборочно приведем графики характерных режимов работы «солнечной» электростанции [1]. На рис.2 показан заряд аккумулятора от солнечной батареи в безоблачную погоду. На горизонтальной оси графиков откладывается время. Оно соответствует трем суткам. График нагляден и в пояснении не нуждается.

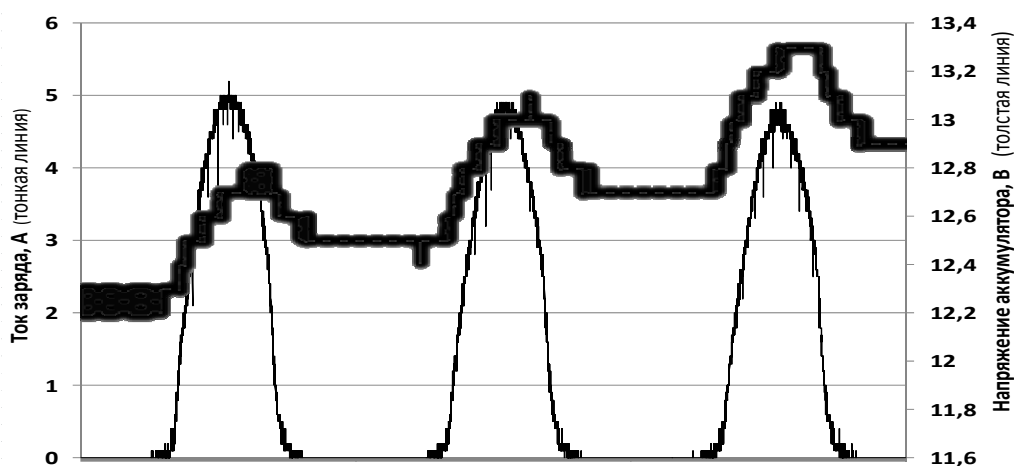


Рис. 2. График заряда аккумулятора 23,24,25 июля 2011 года

На рис.3 изображен график работы электростанции на нагрузку, то есть инвертор. На графике видно, что при достижении напряжения на аккумуляторе 14,1 Вольт, контроллер заряда, чтобы не допустить

перезарядки, ограничил ток от солнечной батареи. Напряжение на аккумуляторе не растет, заряда нет. Утром, в 11-00 20 июля был включен инвертор.

Мощность, потребляемая офисными компьютерами, соответствует току инвертора 18 – 19 ампер. Короткие пики тока до 50 – 75 Ампер соответствуют работе лазерного принтера. В конце рабочего дня офиса остается включенным только ноутбук. Этой нагрузке соответствует ток инвертора около 4 ампер. За неполный день 20 июля напряжение на аккумуляторе «сработалось» с 14,1 до 12,7 вольт, в нагрузку отдалось 0,6 киловатт часов электроэнергии (по электросчетчику).

В 9-00 21 июля вновь был включен инвертор. Напряжение на аккумуляторе уменьшилось с 12,7 до 11,9 Вольт, в нагрузку передано 1,5 киловатт часов электроэнергии. Из за низкого напряжения на аккумуляторе, 22 июля, инвертор не включался. За счет дневной подзарядки в этот день напряжение увеличилось до 12,3 вольт. Продолжение заряда аккумулятора 23,24,25 июля показано на рис. 2.

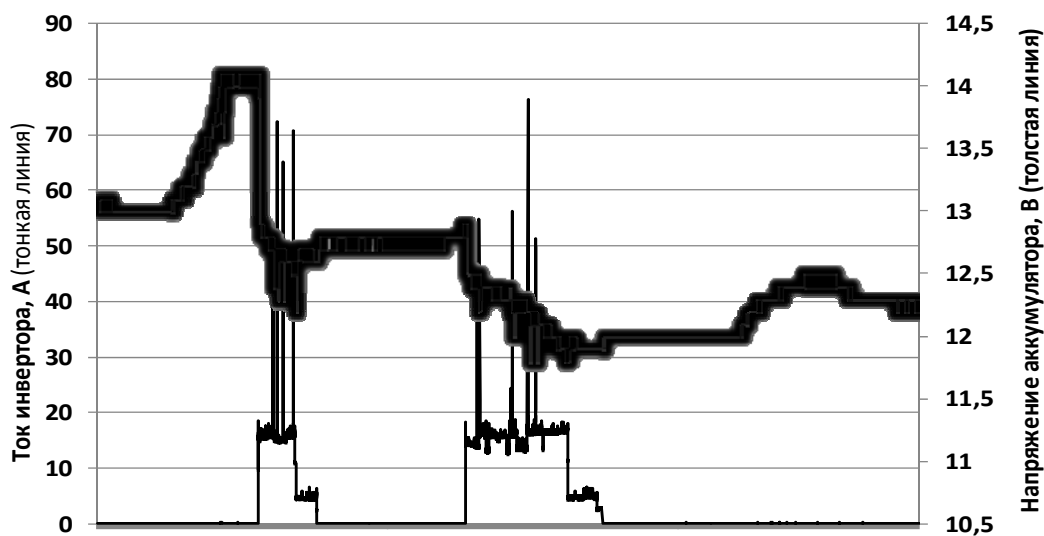


Рис. 3. График разряда аккумулятора на инвертор 20,21,22 июля 2011г.

На рис. 4 приведен график тока солнечной батареи в безоблачный день 2 июля, в день 3 июля с переменной облачностью, в середине дня – дождь и в полностью дождливый день – 4 июля. Сравнивая безоблачный день 2 июля и облачный день 3 июля, а также данные по другим

подобным дням, можно сделать вывод, что выработка электроэнергии солнечной батареей при рассеянном освещении не превышает 20 % от выработки при прямом освещении в ясную погоду.

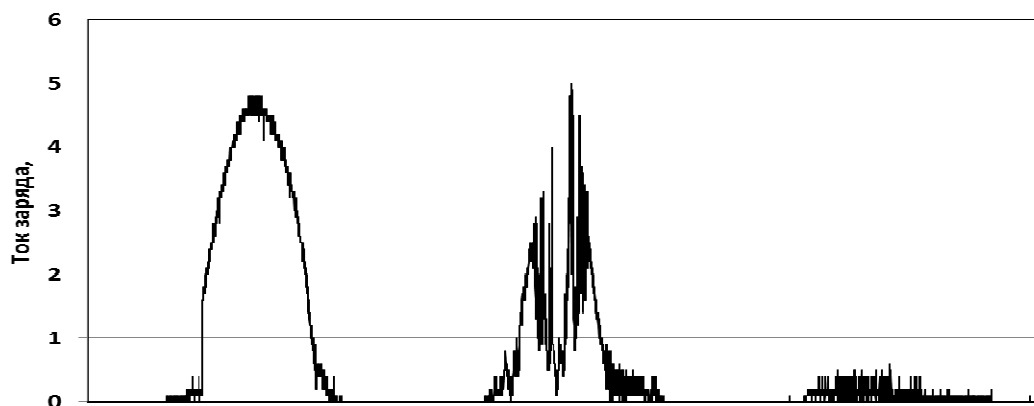


Рис. 4. Ток солнечной батареи 2, 3, 4 июля 2011г.

О положительном эффекте работы солнечной электростанции. За период с августа 2009 года по сентябрь 2018 года потребители получили чуть менее 600 кВт*ч электроэнергии. Это подтвердило первоначальное предположение, что фотоэлектрическая панель площадью 1 кв.м., мощностью 100 Вт в условиях г. Ульяновска способна выработать в месяц около 5 кВт*ч.

Фактически это значение будет больше 5 кВт*ч, так как при отсутствии потребления (в выходные и праздники) аккумулятор заряжался полностью и контроллер заряда отключал его от фотоэлектрической панели. Панель продолжала работать вхолостую.

Средняя месячная наработка за 12 месяцев с октября 2010г. по сентябрь 2011г. составила 5,01 кВт*ч. Стоимость одного ватта мощности такой электростанции равна $70\,000/130=538,5$ рублей.

Таким образом, использование солнечных батарей не рентабельно при рыночной стоимости киловатт часа 1,5 – 4,0 рубля. Так же, на наш взгляд, не окупятся капитальные вложения в «солнечную» электростанцию за срок службы аккумулятора (5–10 лет) и электронного оборудования (10–15лет).

Возможности удешевления и двойного назначения для солнечной электростанции. Смонтированная фотоэлектрическая панель на стене

здания и оборудование «солнечной» электростанции внутри вызывают интерес посетителей и клиентов офиса. Однако немногие соглашаются установить подобную электростанцию у себя дома или в офисе. Главная причины тому – высокая цена на оборудование и длительный срок окупаемости при стоимости электроэнергии около 3 рублей за кВт*ч. Но есть варианты, при которых установка «солнечной» электростанции не будет слишком затратной.

Предположим в квартире, доме или офисе организации имеется источник бесперебойного питания для различных систем, таких как видеонаблюдение и охранно-пожарная сигнализация, система «умного» дома, автоматика и насосы системы отопления, серверы и т.п. Такой источник включает в себя аккумулятор, инвертор и схему заряда аккумулятора от сети. Дооснастив источник бесперебойного питания фотоэлектрическими панелями и контроллером заряда, превращаем его в солнечную электростанцию.

Неплохой вариант, на наш взгляд, использования фотоэлектрических панелей в строительстве. При наружной отделке зданий получили распространение вентилируемые фасады. На несущую стену монтируется каркас, на который крепятся плитки из облицовочного материала, например, из керамогранита. Здание приобретает красивый вид.

Без ущерба для функционирования фасада и внешнего вида здания, плитки из керамогранита можно заменить на стеклянные фотоэлектрические панели. Тогда стена, обращенная на юг, юго-запад или юго-восток будет генерировать электроэнергию, достаточную, например, для освещения прилегающей территории или мест общего пользования внутри здания и одновременно выполнять функцию бесперебойного электроснабжения жизненно-важных систем здания.

Проблемы выработки электроэнергии. В настоящее время в обществе растет интерес к альтернативным энергетическим ресурсам. Этот интерес обусловлен, прежде всего, растущими ценами на традиционные энергоносители (нефть, газ), а также загрязнением окружающей среды при сжигании нефти, газа, угля и при использовании атомной энергии.

К альтернативной энергетике можно отнести ветряные установки для выработки механической и электроэнергии, солнечные тепловые и фотоэлектрические преобразователи, генераторы топлива и газа из биологических отходов и растений, электростанции, работающие от приливов, геотермальные станции, использующие тепло Земли. Из этого ряда наиболее распространенными (по доступности энергоресурса) и приемлемыми по стоимости оборудования являются ветряные установки и солнечные фотоэлектрические преобразователи или солнечные электрические батареи.

Достоинства солнечных батарей, такие как отсутствие подвижных частей и шума при работе, стабильные характеристики и большой срок службы, малая масса и простота в обслуживании должны обеспечить широкое использование солнечных батарей для генерации электроэнергии для небольших предприятий, офисов, частных домов и квартир, как в городских условиях, так и в сельской местности. Однако в средней полосе России, в Поволжье их увидеть практически невозможно.

Среднегодовой поток солнечной энергии по данным [2] для России составляет – от 800 до 1100 кВт·ч / кв. м. Для сравнения в Германии, Чехии, Польше – от 950 до 1050 кВт·ч / кв. м., в Болгарии – 2000 кВт·ч / кв. м. Потенциальные ресурсы по солнечной энергии Германии сопоставимы с Россией, однако в Германии в 2010 году по данным [2] 2% от производства всей электроэнергии приходится на долю солнечных батарей, в России же в сентябре 2010 года построена лишь первая солнечная электростанция в Белгородской области мощностью 100 кВт.

Почему же не распространены в России солнечные батареи, сколько стоит минимальная солнечная электростанция, сколько стоит произведенный ей один киловатт час электроэнергии, сколько электроэнергии произведет солнечная электростанция в климатических условиях Среднего Поволжья? Ответы на эти вопросы, по крайней мере, для нас были получены после приобретения оборудования, сборки и многолетней эксплуатации солнечной электростанции в офисе предприятия в центре города Ульяновска.

Перспективы солнечной энергетике. Увеличение рентабельности (и снижение стоимости киловатт часа) может произойти при увеличении

числа солнечных батарей и как следствие увеличение мощности генерации. Этот принцип снижения стоимости энергии при увеличении мощности действует во всех отраслях электроэнергетики. Однако здесь имеется сложность в сбыте (продаже) излишек электроэнергии.

Например, для небольшого офиса, если мощность солнечных батарей равна средней суммарной мощности потребителей, может быть ситуация когда появится избыточная энергия. Иными словами солнечные батареи будут работать частично вхолостую.

В Германии имеются законодательные акты [3], которые гарантируют покупку электрическими сетями излишек произведенной электроэнергии. Этот факт, а также стоимость электроэнергии от 0,2 до 0,35 евро центов (от 8,4 до 14,28 рублей) за киловатт час при сопоставимых ценах на солнечные батареи позволяют владельцу «солнечной» электростанции в Германии уже через год эксплуатации окупить все расходы и получать прибыль со второго года.

Непопулярность солнечных батарей в России обусловлена, на наш взгляд, в меньшей степени техническими, а в большей степени организационно-экономическими сложностями. Использование солнечных батарей в условиях города несколько затруднительно.

Батареи должны располагаться на стенах, обращенных на юго-восток, юг, и юго-запад. Рядом расположенные здания и деревья не должны отбрасывать тень на батареи. Поэтому на практике подобрать оптимальное место для монтажа не всегда удается.

Главное, как упоминалось выше, одна солнечная батарея площадью 1 кв. м. в среднем вырабатывает за месяц в условиях г. Ульяновска около 5 кВт часов электроэнергии. Чтобы получить полную автономию по электроснабжению, например квартиры, потребляющей в месяц 200 кВт часов, необходимо установить 40 солнечных батарей. Для такого количества может просто не хватить места для установки на стенах, да и стоимость только батарей будет сопоставима со стоимостью самой квартиры.

Однако в некоторых случаях использование солнечной электроэнергии, будет иметь экономическую выгоду уже в настоящих условиях российской действительности. В одном случае, когда

электроснабжение полностью отсутствует, и для подключения к централизованной сети необходимо выполнить проектные работы, оплатить строительство линии электропередачи и трансформатора.

Сюда можно отнести объекты связи (ретрансляторы, базовые станции сотовой связи), автозаправочные станции, удаленные объекты в сельском хозяйстве и др. Построить «солнечную» электростанцию мощностью 3–5 кВт на таких объектах будет значительно дешевле.

В другом случае, когда на каком либо объекте имеется дефицит мощности, а действующая электросеть без дорогостоящей реконструкции не способна покрыть этот дефицит, «солнечная» электростанция может быть не плохим, а главное относительно недорогим решением проблемы.

Ещё одно преимущество «солнечной» электростанции заключается в её автономности и независимости от крупных поставщиков электроэнергии. Солнечные батареи при массовом их использовании [4] должны составить основу децентрализованной системы выработки электроэнергии.

Принадлежащие широкому кругу лиц, устанавливаемые на крышах и стенах домов, солнечные электростанции будут противодействовать диктату цен энергетических гигантов, имеющему место в настоящее время. Ведь важнейшим компонентом офиса является компьютерное оборудование, на энергоснабжение которого вполне хватает солнечной энергии.

Искусственное освещение раздражает и препятствует выработке мелатонина (гормона сна), а при свете экономичных экранов можно вполне комфортно ориентироваться в помещении, и продолжительно там находиться.

Такая распределенная сеть максимально приближает источник солнечной электроэнергии к потребителю, не только сводя к нулю потери при передаче по линиям, но и повышая надежность электроснабжения.

Многочисленные зимние аварии в результате обледенения проводов ЛЭП приводят к необходимости построения распределенной сети электрогенераторов. А Солнце ласковое уже в январе, поэтому «солнечные» электростанции, в силу их преимуществ, должны занять

свою долю в такой сети, гарантируя непрерывную и автономную работу офисных помещений.

Выводы

1. Основной целью установки солнечной электростанции было обеспечить бесперебойное питание компьютеров при частых аварийных отключениях электроэнергии.

2. Через полгода после пуска станции был заменен один элемент аккумулятора. Других отказов за 10 лет эксплуатации электростанции (с августа 2009г. по сентябрь 2018г.) не было.

3. За 10 лет потребители получили чуть менее 600 кВт*ч солнечной электроэнергии. Однако капитальные вложения в «солнечную» электростанцию до сих пор не окупились, хотя истекает гарантийный срок службы аккумулятора и электронного оборудования.

Список литературы

1. Кузьмин Н.П., Маркелов А.А. Офисная солнечная электростанция // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2011.– Вып. 9.– С. 192–200.

2. Харченко Н.В. Индивидуальные солнечные установки. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 208 с.

3. [http://ru.wikipedia.org/wiki/Солнечная энергетика](http://ru.wikipedia.org/wiki/Солнечная_энергетика).

4. Алфёров Ж.И., Андреев В.М., Румянцев В.Д. Тенденции и перспективы развития солнечной фотоэнергетики // Физика и техника полупроводников, 2004.– Т. 38.– Вып.8.– С. 937–948.

Кузьмин Николай Павлович – директор Общества с ограниченной ответственностью ООО "Спецмонтажсервис".

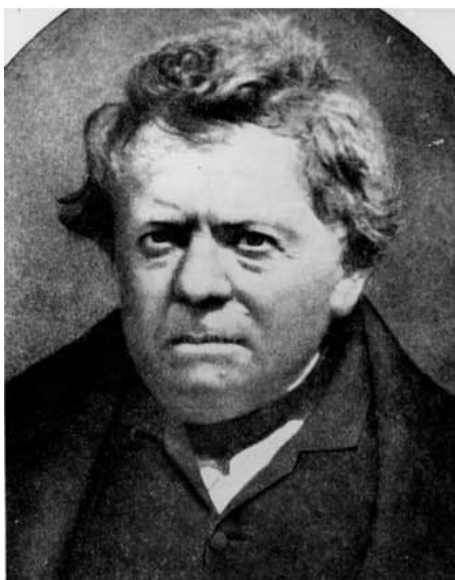
Домашний адрес: 432010, г. Ульяновск, проезд Сиреневый д.14, кв.11;
тел:(8927)270-13-62; e-mail: niko_rus@mail.ru.

Маркелов Александр Александрович – зам. директора Общества с ограниченной ответственностью ООО "Спецмонтажсервис".

Домашний адрес: 432071 г.Ульяновск, ул.Островского, д.58, кв. 4;
тел: (905)0360176.

КЛАССИКИ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

ТАК НАЧИНАЛАСЬ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ



Георг Симон Ом (1787-1854)

190 лет «Теоретическому исследованию электрических цепей» [5]. В 1827 году мир получил фундаментальную работу, в которой Ом вводит понятия и точные определения электродвижущей силы, электропроводности и силы тока. Исходя из этого, ученый формулирует известные закономерности изменения электрического напряжения вдоль цепи и излагает основы первого метода анализа электрических цепей – метода преобразования последовательно и параллельно соединенных элементов электрической цепи.

Выдающийся немецкий ученый, Георг Симон Ом, ныне известен не только как основатель нового научного и практического направления, отрасли промышленности, но также и как признанный специалист по акустике и кристаллооптике. Важно отметить, что многие достижения Георга Ома по-прежнему сохраняют свое значение.

Сегодня каждый школьник слышал о знаменитом законе, который устанавливает зависимость между силой тока, разностью потенциалов и

сопротивлением материала, но мало кто знает о том, какое драматическое влияние его открытие оказало на жизнь самого ученого. Презрев догматы своего времени, Георг Ом оказался жертвой инерции общественного сознания, с которым боролся на протяжении многих лет, и смог преодолеть лишь благодаря упорному труду и готовности идти на жертвы ради достижения Истины.

Вехи жизни. Георг Ом родился 16 марта 1787 в баварском городке Эрланген в простой рабочей семье. Отец Георга Симона, Иоганн Вольфганг Ом, был потомственным слесарем, однако его интересы простирались намного шире, чем того требовало его ремесло.

Георг Ом самостоятельно по учебникам занимался математикой, историей, географией, философией, а также посещал в Берлине школу технического рисования. Свою любовь к познанию Иоганн Ом стремился привить своим детям, и надо отметить, что небезуспешно – оба его сына стали профессорами: Георг – физиком, а Мартин – математиком.

Стоит отметить, что стремление к самообразованию для детей Ома отчасти было обусловлено неудовлетворительным качеством обучения в школе и городской гимназии. Еще более важными для них стали занятия с преподавателями Эрлангенского университета, с которыми их любознательный отец старался поддерживать дружеские отношения.

При такой подготовке у Георга Ома не было проблем ни с поступлением в университет, ни с обучением. Может быть, по этой причине он с азартом окунулся в спорт, увлекся танцами, что привело в конечном итоге к семейному конфликту, разрешением которого стал отъезд Георга, проучившегося в университете всего полтора года, в Швейцарию, где ему предложили занять место преподавателя математики в частной школе [2].

Однако начало преподавательской карьеры будущего ученого складывалось не слишком успешно, что не могло удовлетворить не лишённого амбиций Георга. В этот период ему особенно пригодилась способность к самостоятельному изучению научных трудов, которую он перенял от отца.

Эти занятия оказались весьма плодотворными. Когда Ом в 1811 все же вернулся в Эрланген, то в течение года сумел окончить университет,

защитить диссертацию, получить ученую степень доктора философии и должность приват-доцента кафедры математики.

К сожалению, уже совсем скоро Георг Ом вынужден был по материальным соображениям искать другое место работы. В январе 1813 он получил работу учителя математики и физики школы в Бамберге. Однако, методика преподавания в этой школе (как и во многих других европейских школах того времени) была такова, что Ом счел своим долгом направить в Генеральный комиссариат по преподаванию свои критические соображения. За этим последовало то, что в 1816 году школа в Бамберге была закрыта, а Ома перевели в местную подготовительную школу.

На основе этого печального опыта Ом подготовил и в 1817 году опубликовал свой первый печатный труд, в котором представил свою методику преподавания математики [3]. Работа была встречена сдержанно, если не сказать враждебно.

Ом старался энергично отстаивать свои идеи, посылал письма с экземплярами статьи не только в университеты и школы, но и в министерства и даже королям (Вюртенберга и Пруссии). Постепенно у Георга Ома стали появляться единомышленники. Уже в 1824 году он получает приглашение занять место учителя физики и математики в иезуитской коллегии Кельна, где Ом и трудился последующие 9 лет.

Математик стал физиком. Именно в иезуитской коллегии Кельна Ом «превратился» из математика в физика. Его увлекли исследования малоизученных на тот момент электрических явлений. Известно, что Ома вдохновляли идеи теории теплопроводности французского математика и физика Ж.Б.Ж.Фурье, по которым электрический ток представлялся как течение некоего флюида, вызываемое перепадами «электроскопических сил» [2]. Ом руководствовался также и аналогией между токами в проводниках и течением жидкостей по трубам.

Путь, по которому пошел Георг Ом, определялся ясным пониманием того, что первым делом следует количественно исследовать физическое явление. Для измерения тока уже раньше пытались использовать тот факт, что ток вызывает нагревание проводника. Однако Ом избрал для измерения тока не тепловое, а именно его магнитное действие, открытое

Эрстедом. Ток, протекавший по проводнику, вызывал поворот магнитной стрелки, подвешенной на золотой проволочке. Экспериментатор, поворачивая микрометрический винт, к которому крепился верхний конец проволочки, добивался компенсации поворота, вызванного магнитным воздействием, и угол поворота этого винта и являлся мерилем тока.

Первоначально Ом использовал гальванические источники тока, но вскоре обнаружил, что они создают ток, быстро убывающий со временем. К сожалению, полученные некорректные результаты уже легли в основу статьи «Предварительное сообщение о законе, по которому металлы проводят контактное электричество», которую он поспешил опубликовать в 1825 г в «Журнале физики и химии», издаваемом Дж. Швейгером [4], что серьезно подорвало репутацию Ома в научной среде [2].

Главным источником погрешностей была гальваническая батарея. Он нашел выход из этого положения, воспользовавшись советом И.Х. Поггендорфа [2], издателя «Annalen der Physik und Chemie», применить эффект, открытый Т. И. Зеебеком, – возникновение тока в цепи из двух различных проводов, если спаи между ними имеют различные температуры. Ом в качестве источника тока использовал элемент из висмута и из меди, один спай которых находился в кипящей воде, а другой – в тающем снеге.

В 1826 году в «Журнале физики и химии» была опубликована первая работа в области теоретической электротехники «Определение закона, согласно которому металлы проводят контактное электричество, наряду с наброском теории аппаратов Вольта и гальванометров Швейгера» [1].

Результаты новых исследований были отражены не только в классической статье [1], и в последовавшей за ней (в 1827 году) фундаментальной работой «Теоретическое исследование электрических цепей» [5]. В этих работах Ом вводит понятия и точные определения электродвижущей силы, или «электроскопической силы» (по выражению самого ученого), электропроводности и силы тока.

Выразив выведенный им закон в дифференциальной форме, приводимой современными авторами, Ом записывает его и в конечных величинах для частных случаев конкретных электрических цепей, из которых особенно важна термоэлектрическая цепь. Исходя из этого, он

формулирует известные законы изменения электрического напряжения вдоль цепи. Кроме того, Ом излагает основы первого метода анализа электрических цепей – метода преобразования последовательно и параллельно соединенных ветвей.

Начала теории электрических измерений. Однако научная общественность вновь встретила публикации Ома весьма прохладно. Возможно, причиной этого были господствовавшие в то время философские взгляды [2].

Многие ученые натурфилософы (в числе которых были и высокопоставленные) придерживались того мнения, что истина должна постигаться умозрительным путем, что опыт не может (и даже не должен) занимать в науке лидирующего положения. Противники Ома не только отрицали его заслуги, но и активно мешали ему работать.

Все хлопоты о месте работы, где можно было бы плодотворно заниматься наукой, оставались тщетными. Даже выступать в печати со своими доводами Ому было затруднительно. Вместо того чтобы продолжать исследования, Ом вынужден тратить время и энергию на научную и околонучную полемику, поскольку от признания полученных результатов зависело его назначение на хорошую должность и материальное благополучие.

Несмотря ни на что, талант пробивает себе дорогу и уже в 1829 году в «Журнале физики и химии» появляется новая статья «Экспериментальный вклад в полное познание электромагнитного гальванометра» [6]. В этой статье были заложены основы теории электроизмерительных приборов. Здесь же Ом впервые предложил единицу сопротивления, в качестве которой он выбрал сопротивление медной проволоки длиной 1 фут (304,8 мм) и поперечным сечением в 1 квадратную линию (6,452 мм²).

В следующем, 1830 году, выходит в свет новая работа Ома «Попытка создания приближенной теории однополярной проводимости» [7]. Эта публикация вызвала интерес у ряда ученых, в том числе у знаменитого Майкла Фарадея, однако до всеобщего признания было еще далеко.

Реакционное давление со стороны научного сообщества в конце концов привело к тому, что, начиная 1833 года, Ом практически отошел от исследовательской деятельности, сосредоточившись на преподавании и

административной работе в политехнической школе Нюрнберга. К серьезной науке он вернулся только к 1839 году, но на этот раз уже в области акустики, в которой он также добился впечатляющих результатов, открыв в 1843 году так называемый акустический закон Ома [2].

По иронии судьбы, как раз в то время, когда сам Георг Ом уже потерял интерес к электрическим явлениям, его работы привлекли к себе пристальное внимание за рубежом. В 1841 труды Ома были переведены на английский язык, в 1847 — на итальянский, в 1860 — на французский [2].

Отметим, что хотя перевода публикаций Ома на русский язык не было, но именно Э. Х. Ленц и Б. С. Якоби, работавшие в те годы в России, первыми привлекли внимание широкой научной общественности к трудам Ома. В 1842 году Георг Ом стал вторым немецким ученым, которого Лондонское Королевское общество наградило золотой медалью и избрало своим членом.

Наконец, через 20 лет ожидания, Георг Ом получил признание и на родине. В 1845 его избрали в Баварскую АН, а через четыре года пригласили в Мюнхен на должность экстраординарного профессора. Тогда же он назначается хранителем государственного собрания физико-математических приборов и референтом по телеграфному ведомству при физико-техническом отделе Министерства государственной торговли.

Одновременно Г. Ом продолжает читать лекции по физике и по математике, занимается научными исследованиями, конструированием и изготовлением приборов. Много внимания уделяет методике преподавания. В последние годы жизни он начал работать над учебником физики, но успел закончить лишь первый том «Вклад в молекулярную физику» [8].

В 1852 году Георг Ом получил наконец-то должность ординарного профессора, о которой мечтал всю жизнь. В 1853 году он одним из первых награждается только что учрежденным орденом Максимилиана «За выдающиеся достижения в области науки». Но признание пришло слишком поздно. Силы уже были на исходе. 6 июля 1854 года Георг Ом скончался и был похоронен на старом южном кладбище города Мюнхена (рис. 1).



Рис. 1. Могила Георга Ома на старом южном кладбище города Мюнхена

Научный путь Георга Ома в очередной раз подтверждает известный тезис о том, что самые передовые идеи в науке часто оказываются маргинальными по отношению к господствующим на момент их появления представлениям.

В области электротехники так было и с законами Густава Кирхгофа [9], и со схемным подходом Вильгельма Фойснера [10, 11]. Должны были пройти годы, как в случае с работами Ома или Кирхгофа, или даже полвека, как с публикациями Фойснера, прежде чем такие идеи оказываются оцененными по достоинству [12].

Трудности и неприятие идей ломают слабых, а сильных только закаляют и заставляют оттачивать результаты – делать их более простыми и понятными. Пионерские работы получают высокую оценку и развитие, если не современников, то следующих поколений исследователей.

Список литературы

1. Ohm G. S. Bestimmung des Gesetzes, nach welchem Metalle die Contactelektricität leiten, nebst einem Entwurfe zu einer Theorie des Voltaschen Apparates und des Schweiggerschen Multiplicators // Journal für Chemie und Physik – Halle: Verein zur Verbreitung von Naturkenntniss. – №16.– 1826. – S. 137–166.

2. Самин Д. К. Сто великих научных открытий.– М.:Вече,2002.–479 с.
3. Ohm G. S. Grundlinien zu einer zweckmäßigen Behandlung der Geometrie als höheren Bildungsmittels an vorbereitenden Lehranstalten. – Erlangen: Palm und Enke, 1817.– 224 s
4. Ohm G. S. Vorläufige Anzeige des Gesetzes, nach welchem Metalle die Contactelektricität leiten // Journal für Chemie und Physik. – Halle: Verein zur Verbreitung von Naturkenntniss.– №14.– 1825. – S. 110–118.
5. Ohm G. S. Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet. – Berlin: Riemann, 1827. – 245 s.
6. Ohm G. S. Experimentale Beiträge zu einer vollständigen Kenntnis des elektromagnetischen Multiplicators // Journal für Chemie und Physik – Halle: Anton. – №25.– 1829. – S. 1–64.
7. Ohm G. S. Versuche zu einer nähern Bestimmung der Natur unipolarer Leiter. Teil 1 // Journal für Chemie und Physik. – Halle : Anton und Gelbcke. – №29.– 1830. – S. 385–435.
8. Ohm G. S. Grundzüge der Physik als Compendium zu seinen Vorlesungen. – Nürnberg: Schrag, 1854. – 563 s.
9. Kirchhoff G. R. Ueber der Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige // Annalen der Physik.– 1845.– Bd. 64.– S. 497–514.
10. Feussner W. Ueber Stromverzweigung in netzförmigen Leitern // Annalen der Physik. – 1902. – Bd 9, N 13. – S. 1304–1329.
11. Feussner W. Zur Berechnung der Stromstärke in netzförmigen Leitern // Annalen der Physik. – 1904. – Bd 15, N 12. – S. 385–394.
12. Горшков К.С., Филаретов В.В. Схемный подход Вильгельма Фойснера и метод схемных определителей / Под ред. В.В.Филаретова.– Ульяновск: УлГТУ, 2009.– 189 с.

Горшков Константин Сергеевич – канд. техн. наук, доцент кафедры электротехники и прецизионных электромеханических систем Санкт-Петербургского научно-исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики (ИТМО).

E-mail: k.gorshkov@list.ru.

ИЗ ИСТОРИИ ОТКРЫТИЙ

ПЕРВЫЕ ЗАКОНЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

*К 190-й годовщине
монографии Георга Ома*

И. В. Ерохов

Рассмотрена монография Георга Ома (1827г.) с позиций современной теории электрических цепей. Установлено, что известный закон Ома имеет в монографии только одну формулировку и там впервые использованы потенциальные диаграммы. Показано, что уже Георг Ом мог сформулировать второй закон Кирхгофа (1845г.).

Considered monograph by Georg Ohm (1827.) from the standpoint of the modern theory of electric circuits. It is established that the well-known Ohm's law has only one formulation in the monograph and potential diagrams are used there for the first time. It is shown that George Om could be formulate the second law of Kirchhoff (1845).

О трудностях становления теории электрических цепей. Несмотря на то, что ученые-физики, изучающие электрические явления, строили теорию электричества на прочном фундаменте точно установленных фактов, применение математического аппарата не всегда считалось обязательным. Например, для решения задач электростатики математику применяли давно и успешно. Это считалось само собой разумеющимся, т.к. геометрия вносила в процесс решения наглядность.

Однако с открытием «гальванического» электричества возникла проблема в математическом описании движения носителей заряда. Применять геометрический подход к решению новых задач тогда затруднялись. Мало того, большинство ученых считали, что само

«гальваническое» электричество является, всего лишь, физическим феноменом, имеющим чисто практическое значение.

Явление возникновения электрического тока при контакте разных металлов и электролита было открыто Луиджи Гальвани в 1786 году. В 1800 году Алессандро Вольта создал батарею гальванических элементов – вольтов столб. Русский академик В.В. Петров в 1802 году изменил положение столба, расположив его горизонтально, что позволило создать самый мощный источник электричества того времени.

По свидетельству В. В. Петрова в России вольтовые столбы создавались кем угодно и без каких-либо расчетов, так как элементы конструкции столба можно было купить почти в каждой лавке [1]. Любознательные граждане собирали дома источники «гальванического» электричества, дабы повторить опыты Луиджи Гальвани с препаратами, полученными от разных животных. Все казалось простым и доступным, не было запроса на серьезный анализ «гальванических» процессов.

Пионерская работа Ома. С учетом сказанного выше, можно в полной мере оценить научную смелость Георга Ома, который назвал свою монографию буквально вызывающе: «**Гальваническая цепь, описанная математически**» [2]. Книга, изданная в 1827 году, стала первой научной публикацией, которая распространяла математику на изучение электрических явлений. Ученый строил свою теорию на основании экспериментальных данных, которые он считал продолжением исследований Шарля Огюста де Кулона, измерявшего силу взаимодействия электрических зарядов.

Выбор измерительных приборов для Ома был небольшой, так как в начале девятнадцатого века электроскоп был «серийным» прибором, которым можно было фиксировать наличие заряда. Принцип работы электроскопа, как и крутильных весов, основан на свойстве взаимодействия электрических зарядов.

Когда главному элементу прибора – металлическому стержню – сообщался заряд, то лепестки из бумаги, а иногда из золота, имеющие со стержнем шарнирное соединение, также получали часть заряда и в результате их взаимодействия они отклонялись от исходного положения

на определенный угол, величину которого связывали с, так называемой, «электроскопической силой».

По шкале, укрепленной за стержнем, можно было установить численное значение угла, которое соответствует этой силе. Кроме того, электроскоп имел металлический корпус, который соединялся либо с Землей, либо с общим узлом схемы. В зависимости от этого полученный результат можно было трактовать либо как потенциал относительно Земли, либо как потенциал относительно общего узла схемы.

Крутильные весы Кулона работают на том же принципе, однако более удобны в процессе измерений. Сила взаимодействия зарядов отклоняет подвижный заряд на определенный угол по отношению к нити подвеса. Угол поворота оси соответствует величине этого момента, и по значению угла вычисляют силу взаимодействия зарядов или величину заряда.

«Лиха беда начало». Георг Ом начал с простейшей электрической цепи, состоящей из одного контура, в котором источник электричества подключался к одному или нескольким «предметам», способным проводить ток. Разность зарядов (потенциалов), измеренных на концах «проводящего тела», Ом назвал напряжением, которое считал причиной «движения электричества». Силовую характеристику потока носителей заряда, он называл по-разному, в том числе, «силой электричества».

В результате кропотливых исследований Ом показал, что движение зарядов в любом проводящем предмете можно описать формулой:

$$S = \frac{A}{L}, \quad (1)$$

где S – величина, характеризующая поток; A – суммарная величина напряжений; L – длина всех «проводящих тел».

Формулу (1) Г. Ом описал в книге следующим образом:

später noch benutzt werden. Die zweite der vorigen Gleichungen geht durch die getroffene Abänderung über in

$$S = \frac{A}{L},$$

welche allgemein gültig ist und die Gleichheit der Größe des Stromes an allen Stellen der Kette schon durch ihre Form zu erkennen gibt; sie lautet in Worten so: Die Größe des Stromes in einer galvanischen Kette ist der Summe aller Spannungen direkt, und der ganzen reduzirten Länge der Kette umgekehrt proportional, wobei man sich erinnern muß, daß jetzt unter reduzierter Länge die Summe aller Quotienten verstanden wird, die aus den zu homogenen Theilen gehörigen wirklichen Längen

«Величина тока в произвольной гальванической цепи прямо пропорциональна сумме всех напряжений и обратно пропорциональна всем редуцированным длинам цепи»,

Интересно продолжить перевод цитаты из оригинального текста:

«при этом необходимо напомнить, что под редуцированной длиной понимается сумма всех соотношений, принадлежащих однородным частям цепи и состоящих из реальных длин и произведений удельной проводимости на площадь поперечного сечения».

Приведенный выше текст легко записать в виде формулы:

$$L' = \sum_{i=1, \dots, n} \frac{L_i}{\gamma_i \cdot s_i}, \quad (2)$$

где L_i – длина одного из «проводящих тел» контура, [м]; γ_i – удельная проводимость одного из «проводящих тел» контура, [Ом⁻¹/м]; s_i – площадь поперечного сечения одного из «проводящих тел» контура, [м²].

Размерность этой величины соответствует электрическому сопротивлению:

$$[L'] = \frac{\text{м}}{[\text{Ом}^{-1} / \text{м}] \cdot \text{м}^2} = \text{Ом}.$$

Запишем формулу (1) в современных обозначениях для произвольного контура (der Kreis):

$$I_k = \frac{\sum_i U_i}{\sum_j R_j}, \quad (2a)$$

где U_i – напряжение элемента контура; R_j – сопротивление элемента контура; I_k – ток контура.

Если представить, что контур разорван, то получается разомкнутая ветвь (die Zweig). Преобразование контура в ветвь будет эквивалентным при условии, что разность потенциалов узлов ветви будет равна эдс источника контура. В этом случае формула (1) может быть записана следующим образом:

$$I_z = \frac{\sum_i \Delta\varphi_i}{\sum_j R_j} \quad (2б)$$

где $\Delta\varphi_i = U_i$ – разность потенциалов на элементе ветви;
 R_j – сопротивление элемента ветви.

Выражения (2а), (2б) идентичны, а, следовательно, закон Ома применим к любому фрагменту электрической цепи: контуру, ветви, разомкнутому пути. Выражение (1) универсально, конечно, с некоторыми уточнениями, которые уже имеются в тексте монографии [2] и реализованы в (2а), (2б).

Измерять сопротивление «проводящего тела» с помощью линейки вполне возможно, если проводник имеет правильную геометрическую форму, а также известна величина его удельного сопротивления. Однако Г. Ом экспериментировал с «телами» произвольной формы и измерял их длину. Ошибки измерений не было потому, что поток носителей заряда принимал форму минимального сечения «проводящих тел» контура, т.е. был геометрически правильным.

Из книги [2] следует, что «проводящих тел», соединенных последовательно, в эксперименте могло быть несколько, как и источников электричества. Исследуемый контур мог включать в себя, говоря современным языком, несколько резисторов и источников ЭДС. Такой контур уже сложно называть элементарным. Анализируя выражения (1) и (2), а также описание эксперимента, можно трактовать результат Георга Ома как первый шаг к формулировке второго закона Кирхгофа.

«Не знаешь закона Ома – сиди дома». Для определения направления движения тока у Г. Ома была одна понятная всем возможность – обозначить направление движения от положительного полюса источника к отрицательному полюсу (или наоборот). Не желая связывать направление движения носителей заряда с условными обозначениями полюсов источника, ученый высказался по-другому:

«Ток в цепи движется по направлению от точки, с бóльшим значением потенциала, к точке, с меньшим значением потенциала».

Это высказывание получило название «**принципа Ома**». Уравнение Ома сегодня принято записывать в следующей форме:

$$U = R \cdot I, \quad (3)$$

где U – напряжение на участке цепи, [В]; I – ток участка цепи, [А]; R – сопротивление участка цепи, [Ом].

Однако Г. Ом результат своего открытия выразил в форме уравнения (2а). Запишем это уравнение, используя понятие электрической проводимости:

$$I = G \cdot U, \quad (4)$$

где $G = \frac{1}{R}$ – электрическая проводимость, [Ом⁻¹].

Принцип дуальности. Уравнения (3), (4) описывают один и тот же объект – резистор – и являются записью одного и того же закона. Выражения обладают одинаковой структурой, что трактуется как сходство, но разные комплекты физических величин этих уравнений, что подчеркивает различия. В теории категорий такие выражения называют двойственными [3]:

«Для каждого предложения теории категорий существует двойственное предложение, которое получается формальным «обращением стрелок».

$$\begin{array}{ccc} U & = & R \cdot I \\ \downarrow & & \downarrow \downarrow \\ I & = & G \cdot U \end{array} .$$

В нашем случае из уравнения (3) получаем уравнение (4) формальной заменой (по стрелкам) одного комплекта переменных другим.

Имеет смысл привести правило проверки истинности, которое принято в теории категорий: «При этом справедлив, так называемый, принцип двойственности: предложение p истинно в теории категорий тогда и только тогда, когда в этой теории истинно двойственное предложение p^* ». В нашем случае этот принцип действует, так как оба уравнения содержат один и тот же физический смысл [4].

Действительно, умножим слева обе части уравнения (3) на величину тока I и в результате получим формулу Ленца - Джоуля:

$$P = U \cdot I = RI^2, \quad (5)$$

где P – мощность, выделяемая на резисторе при протекании тока.

Умножим слева обе части уравнения (4) на величину напряжения U и в результате получим ту же формулу Ленца - Джоуля:

$$P = I \cdot U = GU^2. \quad (6)$$

Мы с полным правом можем называть уравнения (3), (4) законом Ома для участка цепи, так как его легко получить из формулы мощности.

Потенциальные диаграммы Ома. В монографии Ом приводит результаты измерений в наглядном виде. Такие построения в современной теории электрических цепей называются потенциальными диаграммами. Рассмотрим их в том порядке, который установлен текстом книги.

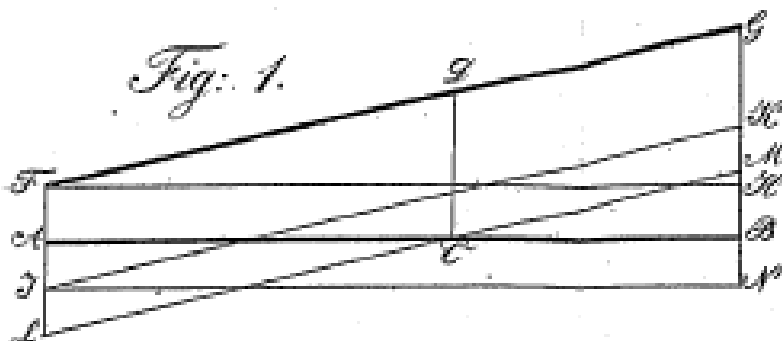


Рис. 1. Потенциальная диаграмма одного «проводящего тела».

На рис. 1 представлена первая из трех диаграмм, которые иллюстрируют результаты измерений. Отрезок HF, параллельный оси абсцисс AB, соответствует редуцированной длине L' «проводящего тела» (R), а отрезок GH, параллельный оси ординат AF, – величине разности потенциалов того же «тела» (U). Запишем соотношение этих отрезков:

$$S = \frac{A}{L'} = \frac{GH}{HF} = \frac{U}{R} = I. \quad (7)$$

Отметим, что второй элемент контура не показан на рис.1. О его наличии свидетельствует лишь отрезок AF – разность потенциалов скрытого «тела». Длина отрезка BG пропорциональна напряжению источника, который также существует на диаграмме только как геометрический объект. Линии KI, LM представляют режимы работы контура при других источниках питания. Треугольники FGH и IKN равны, так как проводящие элементы контура не изменялись.

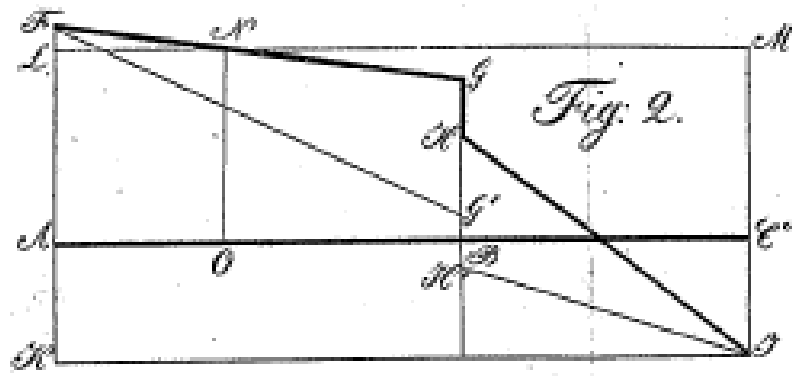


Рис. 2. Потенциальная диаграмма контура, составленного из двух разнородных проводящих «тел»

На рис.2 представлена потенциальная диаграмма другого контура, составленного из двух проводящих «тел», выполненных из разных металлов.

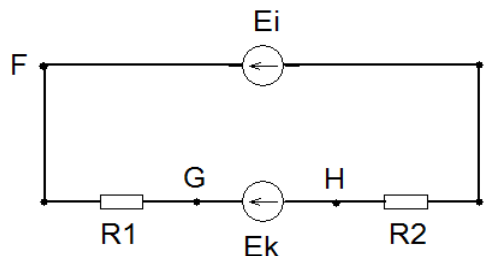


Рис. 3. Цепь, соответствующая потенциальной диаграмме рис. 2

На рис.3 представлена идеальная электрическая цепь, соответствующая потенциальной диаграмме рис.2. Напряжение внешнего источника равно длине отрезка FK. В месте контакта «проводящих тел» возникает напряжение, обусловленное различием свойств металлов, что представляет отрезок GH. Нумерация резисторов проводится по диаграмме «слева-направо». Линии FG' и H'I описывают распределение потенциалов на «телах» из одного металла, но разных сечений.

Многие положения сегодня не нуждаются в доказательстве. Тогда было необходимо отметить, что величина электрического тока в каждом элементе контура имеет одно и то же значение:

ist, geben sogleich zu erkennen, dass die Größe des Stromes in einer solchen galvanischen Kette an allen Stellen überall dieselbe bleibt

«следует также осознать, что величина тока в такой гальванической цепи остается той же самой везде, во всех местах».

Вероятно, язык геометрии тогда был самым авторитетным и Г. Ом использует его. Например, легко представить перенос отрезка HI параллельно самому себе до совпадения точек H и G, рис.2. В результате этого отрезок MI уменьшится на величину, равную отрезку HI.

Запишем уравнение Ома по тексту цитаты в виде формулы (1) для элементов контура (с учетом обозначений потенциальной диаграммы рис.2 и электрической цепи рис.3). Сумма напряжений на резисторах будет равна разности отрезков FK и GH. Потенциал точки F равен расстоянию до оси абсцисс, эта физическая величина имеет знак плюс, а потенциал точки K равен расстоянию до той же оси, но имеет знак минус.

$$S = \frac{FK - GH}{AC} \quad \text{или} \quad I = \frac{(\varphi_F - \varphi_K) - E_k}{R_1 + R_2}. \quad (8)$$

В числителе формул (8) находится суммы напряжений резисторов, а в знаменателе сумма сопротивлений резисторов электрической цепи рис.3.

На рис.4 представлена третья потенциальная диаграмма из источника [2]. Отрезки KI и F'H представляют напряжения, которые возникают на контакте двух разнородных проводящих «тел». Отрезок AF диаграммы соответствует напряжению элемента контура, не упоминаемого в тексте.

Будем считать, что это напряжение, возникает на контакте с полюсом основного источника и обозначаем его E_a . На рис.4, как и на рис.1, распределение потенциалов по проводнику (резистору) показано так, что его величина как бы возрастает при прохождении тока.

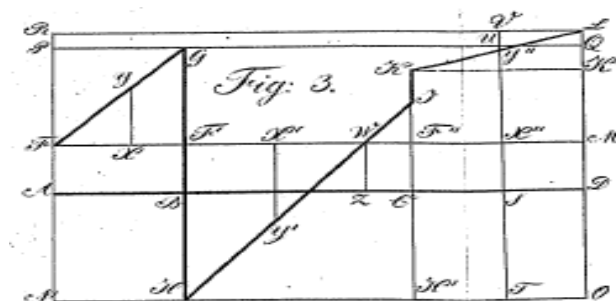


Рис. 4. Третья потенциальная диаграмма контура

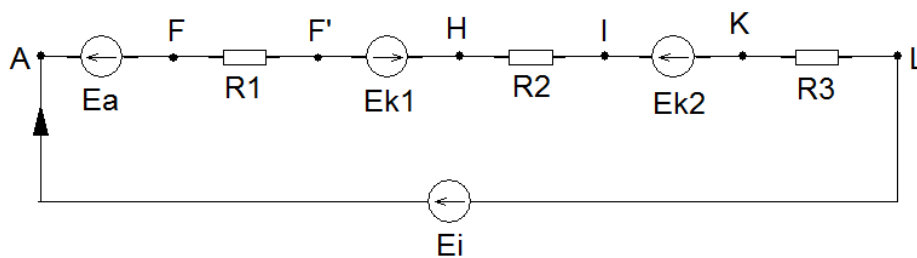


Рис. 5. Элементы третьего контура

На рис.5 представлена электрическая цепь, соответствующая потенциальной диаграмме рис.4. Закон Ома записываем для элементов контура в виде формулы (1) (с учетом обозначений потенциальной диаграммы рис.4 и электрической цепи рис.5):

$$S = \frac{GF' + IH' + LK' - AF + F'H - KI}{AD} \quad \text{или} \quad I = \frac{(\varphi_A - \varphi_L) - Ea + Ek1 - Ek2}{R1 + R2 + R3}. \quad (9)$$

Следует отметить, что Г. Ом считал формулу (1) единственной, которая описывается распространение электричества в проводниках. Конечно, формулу (1) можно уточнить с учетом (2):

$$S = \frac{\sum_i A_i}{\sum_j L'_j}. \quad (10)$$

Разделение на два закона Ома – для участка цепи (4), (7) и для ветви (8), (9) – произошло значительно позже, что не улучшило понимания физической сути явления.

Вот и все о рождении первых уравнений теории электрических цепей. На 83-ей странице монографии заканчивается изложение теории распространения электричества Георга Ома. Кроме основного текста, монография снабжена обстоятельными приложениями на (с. 87–200), а также дополнением (с. 203–243). Содержание этих разделов здесь не комментируется.

О предшественниках Ома. У Г. Ома были предшественники, например, Генри Кавендиш, который один из первых в 1781 открыл закон, но не опубликовал научный результат. Только в 1879 году Джеймс

Максвелл собрал неопубликованные труды ученого и издал их отдельной книгой. Были у Ома и другие предшественники, но это не умаляет значения его научного труда.

Выводы

1. Монография Ома, изданная в 1827 году, была замечена учеными того времени. Пришло время, когда научная общественность была готова к восприятию подобного материала. Книга получилась обстоятельной и понятной читателям.

2. Закон Ома имеет только одну формулировку, которая приведена в этой статье (10), что подтверждается цитатами из оригинального текста. Есть ли собственные источники ветви или их нет, величина тока определяется как соотношение суммы падений напряжения на элементах ветви и суммы их сопротивлений.

3. Георг Ом впервые использовал для отображения результатов измерений потенциальные диаграммы. Основываясь на его выражениях (1) и (2), а также описании эксперимента, можно заключить, что Георг Ом был близок (еще до рождения Кирхгофа) к формулировке второго закона Кирхгофа (1845 г.).

Список литературы

1. Петров В.В. Известие о Гальвани-Вольтовских опытах (1803г.) // Избранные труды по электричеству.– М.: Гос. Изд. Технико-теоретической лит, 1956.– С. 11–94.

2. Ohm G.S. Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet // Т.Н. Riemann: Berlin, 1827. – 247 s.

3. Категория // Математическая энциклопедия: В 5 т. Т.2.– М.: Советская энциклопедия, 1979. – С. 762.

4. Ерохов И.В. Принцип двойственности и теория электрических цепей // www.bogdinst.ru/works/erohov2014.pdf.

Ерохов Игорь Васильевич – профессор, канд. техн. наук, doc. phil. г. Запорожье, Украина.

УРАВНЕНИЯ, ОТРАЖАЮЩИЕ СТРУКТУРУ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

*К 170-й годовщине
первого топологического метода*

И. В. Ерохов

Обсуждается развитие теории электрических цепей от уравнений Кирхгофа и первого топологического метода до топологических результатов Фойснера. Рассмотрена реконструкция топологической формулы Кирхгофа на основе последовательности уточняющих решение дробей. Предложено вместо точных, но громоздких, символьных результатов для схемных функций находить компактное приближенное решение в виде ветвящейся цепной дроби.

The development of the theory of electric circuits from Kirchhoff's equations and the first topological method to the topological results of Feussner is discussed. Considered the reconstruction of the topological formula by Kirchoff based on the sequence of fractions. It is proposed to find a compact approximate solution in the form of a branching continued fraction instead of accurate, but cumbersome, symbolic results for circuit functions.

Измерительный мост Кристи–Уитстона как повод формулирования уравнений. В 1833 году английский физик Самуэль Хантер Кристи (Samuel Hunter Christie) предложил новый метод измерения электрического сопротивления, получивший название баланса Кристи. В 1843 году Чарльз Уитстон (Charles Wheatstone) сделал доклад Лондонскому королевскому обществу об этом методе. Выступая перед учеными, он неоднократно ссылался на автора метода, но это осталось незамеченным. За прибором, реализующим новый метод измерения, установилось название – мост Уитстона.

В 1844 году была опубликована статья Уитстона (на немецком языке) о методах измерения электрического сопротивления [1], а в 1845 году в

том же журнале была напечатана статья Г. Кирхгофа [2], из которой видно, что он был внимательным читателем этого журнала. В примечании к этой статье Кирхгоф предлагает уравнения для описания схемы и анализирует математическую модель баланса Кристи. Так состоялась первая публикация уравнений Кирхгофа:

Wird ein System von Drähten, die auf eine ganz beliebige Weise mit einander verbunden sind, von galvanischen Strömen durchflossen, so ist:

1) wenn die Drähte 1, 2, ... μ in einem Punkte zusammenstoßen,

$$I_1 + I_2 + \dots + I_\mu = 0,$$

wo I_1, I_2, \dots die Intensitäten der Ströme bezeichnen, die jene Drähte durchfließen, alle nach dem Berührungspunkte zu als positiv gerechnet;

2) wenn die Drähte 1, 2, ... ν eine geschlossene Figur bilden,

$$I_1 \cdot \omega_1 + I_2 \cdot \omega_2 + \dots + I_\nu \cdot \omega_\nu$$

= der Summe aller elektromotorischen Kräfte, die sich auf dem Wege: 1, 2, ... ν befinden; wo $\omega_1, \omega_2, \dots$ die

В переводе эта цитата читается так:

«Дана система проводов, которые соединены друг с другом совершенно произвольным образом, и по ним протекает гальванический ток, тогда справедливо:

1) Если провода 1, 2, ..., μ соединены в одной точке, то справедливо

$$I_1 + I_2 + \dots + I_\mu = 0, \quad (1)$$

где I_1, I_2, \dots обозначают интенсивности тока, которые протекают в тех проводах, как положительные учитываются все направленные к узлу;

2) Если провода 1, 2, ..., ν образуют замкнутую фигуру, то справедливо

$$I_1 \cdot \omega_1 + I_2 \cdot \omega_2 + \dots + I_\nu \cdot \omega_\nu = \quad (2)$$

= сумме всех ЭДС, которые находятся на пути: 1, 2, ..., ν ; где $\omega_1, \omega_2, \dots$ сопротивления проводов, I_1, I_2, \dots обозначают интенсивность токов, которые через них протекают, все в едином направлении учитываются как положительные.»

Причина появления объемного примечания была простой. Завершая эксперимент, описанный в [2], Кирхгоф решил измерить сопротивление проводящего листа по отношению к источнику питания. Для этой цели он воспользовался новым методом и собрал измерительный мост. Структура моста Уитстона была представлена графом, рис. 1.

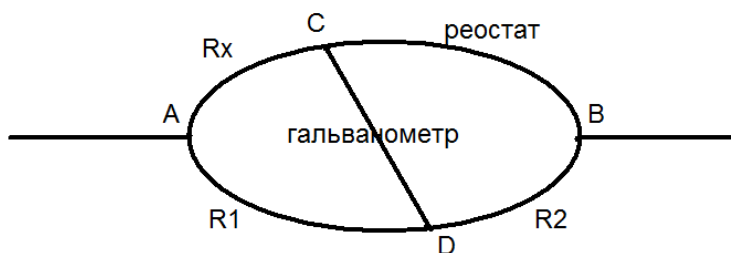


Рис. 1. Граф баланса Кристи

Уравнения (1), (2) Кирхгоф сформулировал для того, чтобы расчетным путем проверить соотношение:

$$\frac{(AC)}{(BC)} = \frac{(AD)}{(BD)} \Rightarrow R_x = (BC) \frac{(AD)}{(BD)}. \quad (3)$$

Статья [1] довольно длинная и посвящена анализу всех методов измерения электрического сопротивления, известных в то время. Ее и сегодня читать трудно, поэтому вполне могло возникнуть желание проверить главное соотношение метода. Вот так, попутно, решая второстепенную задачу, возникли знаменитые уравнения. Именно с помощью уравнений (1), (2) структура электрической цепи была внесена в математическую модель схемы.

«Не боги горшки обжигают». Новые уравнения научная общественность приняла настороженно. Вполне возможно, что именитых ученых раздражал сам факт, что автор был студентом Кёнигсбергского университета. Вероятно, сформулировать эти уравнения были готовы многие, но записал их все-таки Г. Кирхгоф. Вполне возможно, что название уравнений Кирхгофа правилами произошло в жарких спорах того времени.

Джеймс Максвелл при доказательстве теоремы о «тепле» небрежно обошелся с уравнениями Кирхгофа [4]:

«284. В любой системе проводников, не содержащей внутренних электродвижущих сил, тепло, производимое токами, распределенными по закону Ома, оказывается, меньше, чем, если бы токи были распределены любым другим способом, совместным с реальными условиями втекания и вытекания тока».

Несколько выше цитируемого пункта 284, он пишет:

«Теория сопряженных проводников была исследована Кирхгофом. Он сформулировал законы для линейной системы следующим образом, обходя рассмотрение потенциала.

1. (Условие «непрерывности»). В любой точке системы сумма всех токов, текущих к этой точке, равна нулю.

2. В любом замкнутом контуре, образованном проводниками, сумма электродвижущих сил, действующих в контуре, равна сумме произведений тока в каждом проводнике на его сопротивление».

Как видим, жизнь знаменитых уравнений началась с борьбы мнений, типичной для результатов, которые опережают время.

От теории к расчетной практике. Через два года после первой публикации Кирхгоф решил применить уравнения для решения разветвленной электрической цепи [3]. Он поставил перед собой очень трудную задачу – не только описать с помощью уравнений (1), (2) большую систему проводников, но и найти токи в ветвях этой цепи. Сложность поставленной математической задачи вынуждала Г. Кирхгофа записывать уравнения в строго упорядоченной форме:

«Поскольку теоремы 1 и 2 должны дать необходимое число уравнений для определения величин I_1, I_2, \dots, I_n , эти уравнения, как было доказано выше, должны иметь следующий вид:

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha_1^1 w_1 I_1 + & \alpha_2^1 w_2 I_2 + & \dots & + \alpha_n^1 w_n I_n = & \alpha_1^1 E_1 + & \alpha_2^1 E_2 + & \dots & + \alpha_n^1 E_n \\ \alpha_1^2 w_1 I_1 + & \alpha_2^2 w_2 I_2 + & \dots & + \alpha_n^2 w_n I_n = & \alpha_1^2 E_1 + & \alpha_2^2 E_2 + & \dots & + \alpha_n^2 E_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^\mu w_1 I_1 + & \alpha_2^\mu w_2 I_2 + & \dots & + \alpha_n^\mu w_n I_n = & \alpha_1^\mu E_1 + & \alpha_2^\mu E_2 + & \dots & + \alpha_n^\mu E_n \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc}
\alpha_1^{\mu+1} I_1 + & \alpha_2^{\mu+1} I_2 + & \dots & + \alpha_n^{\mu+1} I_n = & 0 \\
\alpha_1^{\mu+2} I_1 + & \alpha_2^{\mu+2} I_2 + & \dots & + \alpha_n^{\mu+2} I_n = & 0 & , \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
\alpha_1^n I_1 + & \alpha_2^n I_2 + & \dots & + \alpha_n^n I_n = & 0
\end{array} \quad (4)$$

где часть коэффициентов α равна +1, часть -1 и 0, а μ означает то же, что и раньше».

Буквой w обозначена величина сопротивления ветви, а буквой E – величина ЭДС источника ветви. Уравнения (4) составлены только для независимых контуров и узлов.

К моменту написания статьи [3] понятие матрицы в математике только формировалось, и Кирхгоф не мог им воспользоваться. Однако, благодаря упорядоченной форме записи уравнений математической модели (4), нетрудно разглядеть коэффициенты α у каждого слагаемого. Значения этих коэффициентов в статье были заданы ограниченным множеством чисел – (1, -1, 0), где единицы соответствуют слагаемым уравнений с тем же знаком, а ноль – слагаемым, которые в уравнении отсутствуют.

Запишем систему уравнений (4) для электрической цепи рис.2, проставляя численные значения коэффициентов α :

$$\begin{array}{rcccccc}
+1 \cdot I_1^b R_1 & +0 \cdot I_2^b R_2 & -1 \cdot I_3^b R_3 & -1 \cdot I_4^b R_4 & +0 \cdot I_5^b R_5 & +0 \cdot I_6^b R_6 & = & 0 \\
0 \cdot I_1^b R_1 & +1 \cdot I_2^b R_2 & +1 \cdot I_3^b R_3 & +0 \cdot I_4^b R_4 & -1 \cdot I_5^b R_5 & +0 \cdot I_6^b R_6 & = & 0 \\
0 \cdot I_1^b R_1 & +0 \cdot I_2^b R_2 & +0 \cdot I_3^b R_3 & +1 \cdot I_4^b R_4 & +1 \cdot I_5^b R_5 & +1 \cdot I_6^b R_6 & = & +1 \cdot E_6 \\
+1 \cdot I_1^b & -1 \cdot I_2^b & +1 \cdot I_3^b & +0 \cdot I_4^b & +0 \cdot I_5^b & +0 \cdot I_6^b & = & 0 \\
0 \cdot I_1^b & +1 \cdot I_2^b & +0 \cdot I_3^b & +0 \cdot I_4^b & +1 \cdot I_5^b & -1 \cdot I_6^b & = & 0 \\
0 \cdot I_1^b & +0 \cdot I_2^b & -1 \cdot I_3^b & +1 \cdot I_4^b & -1 \cdot I_5^b & +0 \cdot I_6^b & = & 0
\end{array} \quad (4a)$$

Правую часть системы уравнений (4a) нет смысла раскрывать подробно, так как источник ЭДС содержится только в ветви 6 электрической цепи рис.2. В нижней подсистеме уравнений (4.6a) правая часть содержит только нули. Коэффициенты α из уравнений (4.6) в системе уравнений (4.6a) принимают знак слагаемых уравнений

Кирхгофа и отделены от других математических символов точкой операции умножения.

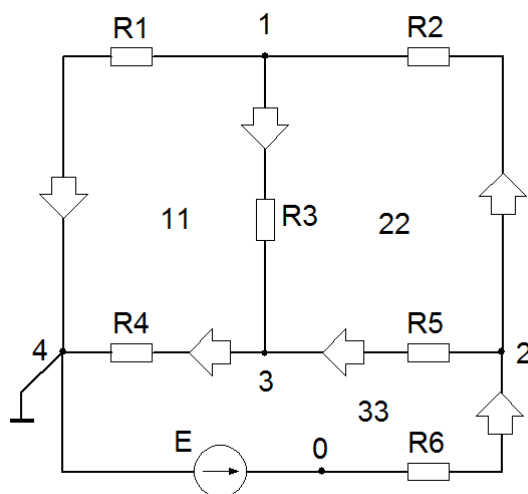


Рис. 2. Схема моста Уитстона

Таким образом, численные значения коэффициентов α образуют матрицы контурных $[B]$ и узловых $[A]$ инциденций, которые являются алгебраической записью структуры электрической цепи (в частности, значения из (4а) представляют структуру цепи рис.2).

Наложение электродвижущих сил в контуре. Вернемся к методу решения системы уравнений (4), размер которой не ограничивался условиями задачи. Понимая невероятную сложность задачи по нахождению токов этой системы проводников, автор сразу решил находить их значения по очереди, максимально упрощая выражение на первом этапе процесса решения. Для этого требовалась другая система уравнений, и Кирхгоф ее формирует как систему уравнений **зависимых** контуров, каждый из которых содержит ветвь с искомым током. В работе [5] приведен конкретный пример электрической цепи, граф которой содержит восемь контуров, содержащих ветвь под номером один. Приближенное значение тока I'_1 находится из уравнения, составленного по второму закону Кирхгофа для каждого контура, после чего проводится уточнение выражений.

Покажем последовательность действий на материале статьи [5]:

$$\begin{aligned}
\frac{\{1,4,5,6\}}{\{2,3\}}; I_1' &= \frac{-E_1 + E_5 - E_6}{R_1 + R_4 + R_5 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_2 R_3 + E_5 R_2 R_3 - E_6 R_2 R_3}{R_1 R_2 R_3 + R_4 R_2 R_3 + R_5 R_2 R_3 + R_6 R_2 R_3}; \\
\frac{\{1,3,6\}}{\{2,4\}}; I_1' &= \frac{-E_1 - E_3 - E_6}{R_1 + R_3 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_2 R_4 - E_3 R_2 R_4 - E_6 R_2 R_4}{R_1 R_2 R_4 + R_3 R_2 R_4 + R_6 R_2 R_4}; \\
\frac{\{1,3,6\}}{\{2,5\}}; I_1' &= \frac{-E_1 - E_3 - E_6}{R_1 + R_3 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_2 R_5 - E_3 R_2 R_5 - E_6 R_2 R_5}{R_1 R_2 R_5 + R_3 R_2 R_5 + R_6 R_2 R_5}; \\
\frac{\{1,2,5\}}{\{3,4\}}; I_1' &= \frac{-E_1 + E_5}{R_1 + R_2 + R_5} \Rightarrow \frac{-E_1 R_3 R_4 + E_5 R_3 R_4}{R_1 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_4 + R_5 R_3 R_4}; \\
\frac{\{1,2,5\}}{\{3,6\}}; I_1' &= \frac{-E_1 + E_5}{R_1 + R_2 + R_5} \Rightarrow \frac{-E_1 R_3 R_6 + E_5 R_3 R_6}{R_1 R_3 R_6 + R_2 R_3 R_6 + R_5 R_3 R_6}; \\
\frac{\{1,3,6\}}{\{4,5\}}; I_1' &= \frac{-E_1 - E_3 - E_6}{R_1 + R_3 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_4 R_5 - E_3 R_4 R_5 - E_6 R_4 R_5}{R_1 R_4 R_5 + R_3 R_4 R_5 + R_6 R_4 R_5}; \\
\frac{\{1,2,5\}}{\{4,6\}}; I_1' &= \frac{-E_1 + E_5}{R_1 + R_2 + R_5} \Rightarrow \frac{-E_1 R_4 R_6 + E_5 R_4 R_6}{R_1 R_4 R_6 + R_2 R_4 R_6 + R_5 R_4 R_6}; \\
\frac{\{1,2,3,4\}}{\{5,6\}}; I_1' &= \frac{-E_1 - E_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \Rightarrow \frac{-E_1 R_5 R_6 - E_3 R_5 R_6}{R_1 R_5 R_6 + R_2 R_5 R_6 + R_3 R_5 R_6 + R_4 R_5 R_6}.
\end{aligned} \tag{5}$$

В условной дроби первого столбца значатся:

- а) в числителе – множество ветвей контура;
б) в знаменателе – множество ветвей цепи, не вошедших в контур.

Уточнение результатов производится умножением числителя и знаменателя выражения для тока на сопротивления ветвей из множества знаменателя условной дроби первого столбца.

Если к графам зависимых контуров применить операцию объединения, то в результате получается полный граф цепи, что очевидно. Если эту же операцию применить к числителям/знаменателям уточненных выражений для искомого тока, то получаются выражения определителей формулы (6) как в числителе, так и в знаменателе:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \tag{6}$$

где Δ – определитель системы уравнений; Δ_1 – определитель, у которого столбец 1 заменен столбцом правых частей.

Такой результат подтверждает справедливость описанного нового метода, но остается в тени тот факт, что в процессе решения была использована система уравнений, отличающаяся от системы (4).

Первыми оценили работы Кирхгофа математики, что следует, например, из статьи [6]:

Für eine beliebige galvanische Stromverzweigung in lineären Leitern liefern bekanntlich die beiden Kirchhoff'schen Gesetze ein Gleichungssystem, aus dem sich die Stromintensitäten der verschiedenen Drähte des Systems als eindeutige Functionen aller elektromotorischen Kräfte und Widerstände des Systems ergeben. Das Bildungsgesetz der

В переводе на русский язык эта цитата читается так:

«Для любой гальванической цепи с разветвлением тока, составленной из линейных проводников, оба известных закона Кирхгофа позволяют записать систему уравнений, в которой величина интенсивности тока любого проводника системы представляется как функция всех источников ЭДС и сопротивлений».

Дальше в статье отмечается, что математическая суть уравнений должна исследоваться отдельно:

Da die ganze Frage jedoch rein mathematischer Natur ist, so dürfte es nicht unangebracht sein, die Kirchhoff'schen Resultate auf rein mathematischem Wege abzuleiten, wobei wir ausgehen von ge-

или в переводе: «Так имеет место чисто математическая природа, то вполне уместно направить результаты Кирхгофа на чисто математический путь»... Но признание уравнений Кирхгофа не помешало автору статьи отметить недостатки предложенного метода решения, который «не облегчит практических расчетов».

От Кирхгофа к Фойснеру: эстафету принял ученик. Метод решения сложной математической модели анализировали не только математики. В своей статье [7] уже известный физик Фридрих Вильгельм Фойснер (который в начале своего научного пути учился у Кирхгофа) профессионально разбирает статью Кирхгофа [3].

Цитаты, которые Фойснер включает в свой текст, приводятся в отредактированном виде, что, кстати, сделало их более понятными. Так точно понимать и ретранслировать Кирхгофа мог только ближайший его коллега. Это яркий пример, когда читателю является «таинство», называемое: «Ученик превзошел Учителя».

Оценка Фойснером метода решения Кирхгофа более резка по сравнению с упомянутой выше оценкой математика по профессии. Подчеркивается, что топологический метод Кирхгофа (!) не имеет будущего в практических расчетах («не будет использоваться физиками»), поэтому Фойснер предлагает совершенный (даже по современным оценкам!) метод прямого (без формирования систем уравнений) топологического анализа «систем проводников» произвольной сложности.

Суть метода состоит в разложении определителей формулы (6) по ветвям. Например, пусть надо найти величину тока в проводнике, обозначенном буквой **a**. Используем для этого следующее выражение [7]:

$$i_a = \frac{E}{w_a + W_a} = \frac{E}{\left(w_a + \frac{N_{a'}}{N_a} \right)}, \quad (7)$$

где w_a – сопротивление удаляемой ветви; W_a – входное сопротивление схемы со стороны удаленной ветви; $N_{a'}$ – определитель системы без ветви **a**; N_a – определитель минора, соответствующего ветви **a**.

С учетом формулы (7) определитель (6) принимает вид:

$$N = w_a N_a + N_{a'}. \quad (8)$$

Разложение определителя по ветвям используется для понижения порядка определителей формулы Крамера (6), (8). Отметим, что режим ветви **a**, удаленной из системы проводников и определителя $N_{a'}$, можно характеризовать как холостой ход.

В качестве примера в статье приводится мост Уитстона и определители матрицы, составленной методом контурных токов.

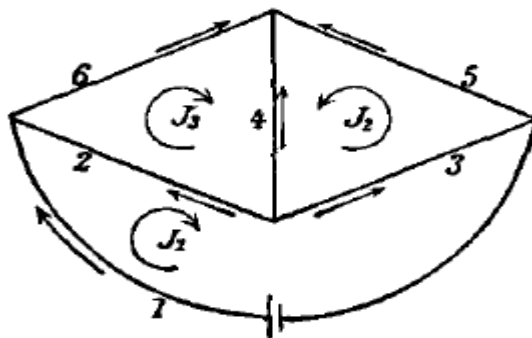


Рис. 3. Пример из статьи [7]

Система уравнений, описывающая схему моста Уитстона рис.3:

$$\begin{vmatrix} w_1 + w_2 + w_3 & w_3 & -w_2 \\ w_3 & w_3 + w_4 + w_5 & w_4 \\ -w_2 & w_4 & w_2 + w_4 + w_6 \end{vmatrix} = N$$

Выражение для числителя формулы (6), составленной для определения первого контурного тока и равного ему тока первой ветви:

$$J_1 \frac{N}{E} = w_4 (w_2 + w_3 + w_5 + w_6) + (w_2 + w_6) (w_3 + w_5)$$

В работе [8] Фойснер распространяет действие алгоритма разложения определителя по ветвям на отдельные фрагменты электрической цепи. В этом случае автора, прежде всего, интересует упрощение графа электрической цепи с помощью удаления ветвей, как в состоянии холостого хода, так и в режиме короткого замыкания. Кстати, короткое замыкание первой ветви схемы рис.3 приводит к слиянию узлов этой ветви. Граф моста превращается в единственный контур с ветвями:

$$w_2/w_3, w_5/w_6, w_4.$$

Фойснер на несколько десятилетий до основоположника диакоптики – Габриэля Крона – применял деление схемы на подсхемы по одному и по двум узлам. Это приводит к резкому уменьшению трудоемкости расчетов и более простым выражениям для токов и напряжений.

Формулы Фойснера послужили фундаментом при создании оригинального схемно-топологического метода, который получил название метода схемных определителей [9]. Идеи Фойснера получили развитие в учебном пособии [10], которое объединяет материалы большого числа статей. В рамках метода схемных определителей диакоптические формулы бисекции Фойснера были обобщены на произвольное число узлов, по которым схема делится на две подсхемы.

Преимущество метода состоит в том, что в процессе работы у пользователя (студента, инженера) развивается схемное мышление. Это достоинство метода особенно ценно, так как топологические методы перегружены математическими понятиями и алгоритмами, а, следовательно, схемотехнические вопросы отходят на второй план.

Достаточно упомянуть, например, метод структурных или обобщенных чисел [11], чтобы проиллюстрировать высказанную мысль.

Итак, топологические методы анализа линейных электрических цепей показали, что численные значения переменных обладают структурой, которая является проекцией графа цепи на решение системы уравнений. Суть любого топологического метода состоит в том, что в процессе решения используются элементы этой структуры. Удивительно только то, что все известные топологические методы решения ориентированы на получение **точного** результата.

Число операций, которые необходимо выполнить для получения численного результата, очень велико, а, следовательно, накапливается погрешность, обусловленная заданием параметров в дискретном виде, т.е. с обязательной погрешностью. Числа исходных данных включают в себе ошибку, которая оценивается величиной, равной половине цены младшего разряда машинного слова. При операциях с такими числами погрешность накапливается в соответствии с известными формулами. При сложении и умножении погрешности операндов складываются. Уменьшить суммарную накопленную погрешность можно только одним способом – сократить число выполняемых операций. В работе [12] показано, как это можно сделать.

От «проклятия размерности» к ветвящейся цепной дроби: новое осмысление идеи Кирхгофа. Несмотря на совершенство, современные схемно-алгебраические методы ориентированы на точное определение значений переменных. Недостатком этих методов, резко снижающим возможности для конкуренции с численными методами, является раздельное нахождение числителя и знаменателя схемной функции, хотя определители совместно входят в выражение (6). Сохранить их единство можно только с помощью особой технологии деления определителей, в результате которого получается непрерывная цепная дробь [13].

Непрерывная дробь отражает структуру математической модели электрической цепи и предоставляет возможность получения приближенных значений переменных. Для вычислений нет необходимости находить полную ветвящуюся цепную дробь, достаточно определить несколько начальных членов ряда подходящих дробей,

погрешность каждой из которых может быть рассчитана [13], [14]. Таким образом, ветвящиеся цепные дроби позволяют остановить вычисления любой переменной или функции схемы при достижении требуемой точности результата.

Отметим, каждая подходящая дробь представляет только часть структуры электрической цепи, т.е. при расчете одновременно реализуются как численное, так и структурное приближения результата. Именно такой подход к решению сложной задачи предлагал Г. Кирхгоф в своей статье о первом топологическом методе [3].

Выводы

1. Схемно-символьное решение, получаемое непосредственно из структуры электрической цепи, в большей мере отвечает человеческому восприятию, чем матрично-численное. Не случайно, первым общим методом анализа электрических цепей был топологический метод Кирхгофа. **2.** Достижением Фойснера стало преодоление избыточности перебора сочетаний ветвей схемы, соответствующих ее деревьям, и получение знаменателя отклика в виде компактно свернутой суммы произведений весов деревьев. **3.** Приближенное решение в виде ветвящейся цепной дроби можно рассматривать как альтернативное к точному символьному решению, полученному методом схемных определителей.

Список литературы

1. Wheatstone Ch. Beschreibung verschiedener neuen Instrumente und Methoden zur Bestimmung der Constanten einer Volta'schen Kette. // Annalen der Physik und Chemie, Band LXII, Leipzig 1844.– S. 499–543.

2. Кирхгоф Г. О прохождении электрического тока через плоскую пластину, например, круглой формы // Избранные труды. Г. Кирхгоф. – М.: Наука, 1988. – С. 155–166.

3. Кирхгоф Г. О решении уравнений, к которым приводит изучение линейного распределения гальванических токов // Избранные труды. Г. Кирхгоф. – М.: Наука, 1988.– С. 170–178.

4. Максвелл Дж. К. Трактат об электричестве и магнетизме: В 2 т. Т. 1. – М.: Наука, 1989. – 416 с.

5. Ерохов И.В. Реконструкция первого топологического метода расчета, созданного Г.Кирхгофом // Тр. Международ. конф. «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке, технике и экономике – КЛИН–2006». – Ульяновск: УлГТУ, 2006.– Т. 3.– С. 76–83.
6. Ahrens W. Ueber das Gleichungssystem einer Kirchhoffschen galvanischen Stromverzweigung // Math. Ann.– 1897.– Band 49.– S. 311–324.
7. Feussner W. Ueber Stromverzweigung in netzförmigen Leitern. // Annalen der Physik und Chemie.– Leipzig.– 1902.– Band 9.– S. 1304–1329.
8. Feussner W. Zur Berechnung der Stromstärke in netzförmigen Leitern. // Annalen der Physik und Chemie.– Leipzig.– 1904.– Band 15.– S. 385–394.
9. Горшков К.С., Филаретов В.В. Схемный подход Вильгельма Фойснера и метод схемных определителей / Под ред. В.В.Филаретова.– Ульяновск: УлГТУ, 2009.– 189 с.
10. Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ и диагностика линейных электрических цепей методом схемных определителей: Учебное пособие. – Ульяновск: УлГТУ, 2003. – 228 с.
11. Трохименко Я.К. Метод обобщенных чисел и анализ линейных цепей. – М.: Советское радио, 1972. – 310 с.
12. Ерохов И.В. Новый подход к созданию топологического метода анализа электрических цепей / Труды международной «Конференции по логике, информатике, науковедению – КЛИН – 2007». – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – Т.3. – с.76-84.
13. Скоробогатько В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 312 с.
14. Стилтьес Т.И. Исследования о непрерывных дробях. – Харьков-Киев: Государственное научно-техническое издательство Украины, 1936. – 156 с.

Ерохов Игорь Васильевич – профессор, канд. техн. наук, doc. phil.
г. Запорожье, Украина.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Анализ и преобразования электронных цепей</i>		
Майко Г. В., Мамед О. Ш., Филаретов В. В.	Неявное замыкание и параллельность в цепях с аномальными элементами	4
Недорезов П. В., Филаретов В. В.	Символьно-полиномиальный анализ линейных электронных цепей методом схемных определителей	18
Шушпанов Д. В.	Схема замещения нелинейного двухполюсника без зависимости вольтамперной характеристики от внешней цепи	36
Шушпанов Д. В.	Аналитический расчет токов и напряжений идеальных диодов в нелинейных резистивных цепях	48
Курганов С. А., Недорезов М. В., Филаретов В. В.	Анализ чувствительности каскадных электронных схем делением их на части	64
Недорезов П. В., Филаретов В. В.	Метод десятичных векторов для символьного анализа электронных схем по частям	77
Курганов С. А., Соловьев В. А.	О частотном анализе устойчивости линейных электрических цепей по критерию Михайлова	89
<i>Моделирование электромагнитных устройств</i>		
Меньшов Е. Н.	Векторные характеристики свободных стационарных волновых процессов	95
Шкуропат И. А.	Расчёт само - и взаимоиндуктивности обмоток в трёхфазном трансформаторе со схемой соединения обмоток «звезда–зигзаг»	101
Безкоровайный В.С., Тарасенко О. В., Ивженко А. А.	Электромагнитный расчет мостового многоэлементного феррозондового преобразователя	111
Канов Л. Н. Солодкий А. В.	Схемное моделирование процессов рекуперации в городском электротранспорте	119

Александров Д. С., Калашников А. С.	Расчёт токов короткого замыкания в распределительных сетях 0,38–35 кв методом базового элемента	127
<i>Структурный синтез</i>		
Гришкевич А. А.	Кодирование дистрибутивной решетки минимальных разрезов графа электрической цепи	141
Свищёва Э. А.	Алгоритм отбора вершин для наращивания неизоморфных корневых деревьев	147
Филаретов В. В.	Структурные закономерности порождения канонических корневых деревьев при лексикографическом порядке	161
Недорезов П. В., Тимофеев В. Ф., Филаретов В. В.	Оптимизация лексикографического алгоритма рекурсивного синтеза неизоморфных корневых деревьев	175
<i>Нейросети и робототехника</i>		
Соловьева Е. Б., Агеев А. Н.	Свойства и характеристики рекуррентных нейронных сетей как аппроксиматоров нелинейных операторов	181
Соловьева Е. Б., Ситников М. А.	Локомоторные функции живых организмов и роботов	187
<i>Из опыта работы</i>		
Кузьмин Н. П., Маркелов А. А.	Разработка и эксплуатация офисной солнечной электростанции	191
<i>Классики теории цепей</i>		
Горшков К. С.	Так начиналась теория электрических цепей	203
<i>Из истории открытий</i>		
Ерохов И. В.	Первые законы теории электрических цепей: 190-я годовщина монографии Георга Ома	211
Ерохов И. В.	Уравнения, отражающие структуру электрической цепи: 170-я годовщина первого топологического метода	222

TABLE OF CONTENTS

<i>Analysis and transformations of electronic networks</i>		
Mayko G. V., Mamed O. Sh., Filaretov V. V.	Implicit closure and parallelism in electronic circuits with pathological elements	4
Nedorezov P. V., Filaretov V. V.	Symbolic-polynomial analysis of linear electronic networks by means of circuit determinants method	18
Shushpanov D. V.	The circuit for replacing a nonlinear two- terminal element whose I-V characteristic is independent of the external network	36
Shushpanov D. V.	Analytical calculation of currents and voltages for ideal diodes in nonlinear resistive circuits	48
Kurganov S. A., Nedorezov M. V., Filaretov V. V.	Sensitivity analysis of cascade electronic circuits by dividing them into parts	64
Nedorezov P. V., Filaretov V. V.	Decimal vector method for symbolic analysis of electronic circuits	77
Kurganov S. A., Soloviev V. A.	On the frequency analysis of stability of linear networks by Mikhailov's criterion	89
<i>Моделирование электромагнитных устройств</i>		
Menshov E. N.	Vector characteristics of free stationary waves processes	95
Shkuropat I. A.	Calculation of self-and mutual inductance of windings in a three-phase transformer with star-zigzag winding connection diagram	101
Beskorovayniy V. S., Tarasenko O. V., Ivzhenko A. A.	Electromagnetic calculation of bridge ferromagnetic converter	111
Kanov L. N. Solodkiy A. V.	Simulation for processes of recovery in urban electric transport	119

Alexandrov D. S., Kalashnikov A. S.	Calculation of short-circuit currents in distribution networks 0,38-35 kV by using base element method	127
<i>Структурный синтез</i>		
Grishkevich A. A.	Coding of the distributive lattice of minimal cuts of the electric circuit graph	141
Svirsheva E. A.	Algorithm to selection of vertices for build non-isomorphic root trees	147
Filaretov V. V.	Structural regularities of generation of the canonical root trees in lexicographical order	161
Nedorezov P. V., Timofeev V. F., Filaretov V. V.	Optimization of lexicographic algorithm for recursive synthesis non-isomorphic root trees	175
<i>Нейросети и робототехника</i>		
Solovyeva E. B., Ageyev A. N.	Properties and characteristics of recurrent neural networks as approximators of nonlinear operators	181
Solovyeva E. B., Sitnikov M. A.	Locomotor functions of living organisms and robots	187
<i>Из опыта работы</i>		
Kuzmin N. P., Markelov A. A.	Разработка и эксплуатация офисной солнечной электростанции	191
<i>Classics of network theory</i>		
Gorshkov K. S.	So began the theory of electrical circuits	203
<i>From the history of discovery</i>		
Erochov I. V.	These first laws of the theory of electric circuits: the 190th anniversary of the monograph by George Ohm	211
Erochov I. V.	Equations reflecting the structure of the electrical circuit: 170th anniversary the first topological method	222

Synthesis, analysis and diagnosis of electronic networks: The international scientific transactions.– Issue 15 / under edition V.V. Filaretov. – Ulyanovsk: Ulyanovsk state technical university, 2018. – 240 p.

This collection of scientific works continues a series of specialized collections published in Ulyanovsk State Technical University during international conferences: «Continual algebraic logic calculus and neuralmathematics in science and technics», «Conference on logic, computer science, sociology of science» and «Volgin's Readings».

In this volume discusses the theoretical questions and practical application of the modern theory of electrical and electronic networks. Including: structural synthesis, synthesis of analog and digital filters, topological analysis, decomposition and transformation of electronic circuits presented nullor and mirror pathological elements.

Recommended for specialists in the field of electronic circuitry analog and mixed discrete electronic circuits, undergraduates and graduate students of corresponding specialties.

Научное электронное издание

**СИНТЕЗ, АНАЛИЗ И ДИАГНОСТИКА
ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ**

Вторая Международная заочная конференция
«Синтез, анализ и диагностика электронных цепей»
(Россия, г. Ульяновск, 10–13 сентября 2018 года)

Международный сборник научных трудов
Выпуск 15

Под редакцией В. В. Филаретова

Компьютерная верстка В. В. Филаретов

ЛР № 020640 от 22.10.97.

Дата подписания к использованию 05.12.2018.
ЭИ № 1205. Объем данных 1,1 Мб. Заказ № 68.

Ульяновский государственный технический университет
432027, Ульяновск, Сев. Венец, 32.
ИПК «Венец» УлГТУ, 432027, Ульяновск, Сев. Венец, 32.

Тел.: (8422) 778-113
E-mail: venec@ulstu.ru
venec.ulstu.ru