Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Ульяновский государственный технический университет

В. К. МАНЖОСОВ

МОДЕЛИ ПРОДОЛЬНОГО УДАРА

Ульяновск 2006

УДК 539.3
ББК 22.251
М23

Рецензенты: доктор техн. наук, проф. Ю. Н. Санкин,
доктор физ.-мат. наук, проф. В. Л. Леонтьев.

Манжосов В. К.

М23 Модели продольного удара / В. К. Манжосов. – Ульяновск : УлГТУ, 2006. – 160 с.

ISBN 5-89146-811-5

В монографии представлены в определенной последовательности модели продольного удара деформируемых твердых тел (стержней). Последовательность изложения моделей продольного удара связана с этапами их разработок и развития. Особое внимание уделено вольновым моделям продольного удара. Рассмотрены различные подходы к описанию динамических процессов при продольном ударе по стержню, составлению уравнений движения механической системы при различных краевых условиях.

Книга будет полезна специалистам, интересующимся вопросами удара, ударных машин и ударных технологий.

УДК 539.3
ББК 22.251

ISBN 5-89146-811-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Удар – одно из распространенных явлений, с которым приходится сталкиваться в практической деятельности. Технологии с использованием удара перспективны, они позволяют воздействовать на обрабатываемый объект с усилиями в несколько сот раз превышающие те, которые способны воспринять опорные устройства технической системы, воспроизводящей удар. Можно представить, какая громоздкая система необходима, если статически вдавливать гвоздь в доску вместо простого удара молотком.

В ударной системе можно реализовать еще одно преимущество: тело, наносящее удар, и обрабатываемый объект могут быть расположены на различных участках технологического пространства. Передача механической энергии для совершения работы при воздействии на обрабатываемый объект осуществляется через систему сопряженных тел. Естественно, что эффективность такой системы может быть достигнута, если располагать достаточными знаниями и представлениями о происходящих динамических процессах.

К одним из первых работ в области удара можно отнести исследования, выполненные еще в 17 веке Марци, Гюйгенсом, Валлисом, Ньютоном. Эти исследования базировались на модели удара абсолютно твердых тел с использованием гипотез о количественном значении скоростей тел после удара. Количественные значения скоростей тел после удара определялись либо из предположения о сохранении кинетической энергии соударяющихся тел (модель Марци - Гюйгенса), либо из предположения о равенстве скоростей тел после удара (модель Валлиса), либо из предположения о пропорциональности относительных скоростей соударяющихся тел перед ударом и после удара (модель Ньютона). Коэффициент пропорциональности представляет собой величину, называемую коэффициентом восстановления. Его значения находятся в диапазоне от нуля (пластический удар) до единицы (абсолютно упругий удар).

Модель удара Ньютона широко используется при описании движения соударяющихся тел на интервале времени, по сравнению с которыми допустимо удар считать мгновенным. Однако при анализе ударных систем важной является и другая задача – определение ударных сил, возникающих в процессе удара. Естественно, что эта задача не может быть решена без учета деформирования соударяющихся тел в процессе удара.

Наиболее простая по постановке задача о продольном ударе стержней с учетом их деформирования связана с использованием модели Кокса (1849 г.). Модель базируется на использовании теоремы об изменении кинетической энергии механической системы и гипотез об аналогии характера распределения деформаций при ударе и при статическом взаимодействии тел. Эта модель позволяет ввести понятие коэффициента динамичности, производить расчет коэффициента динамичности и максимального значения ударной силы. Данный подход и его модификации оказались настолько универсальными и эф-

фективными в смысле простоты, что до сих пор в учебной литературе по сопротивлению материалов, строительной механике излагается как основной метод при расчете ударного нагружения стержней.

Подходы, связанные с использованием модели Кокса, имеют один существенный недостаток – это предположение об аналогии характера распределения деформаций при ударе и при статическом взаимодействии тел. Погрешность расчета ударной силы при продольном ударе по стержню может достигать в ряде случаев 70 – 80 %. Учет части массы стержня как приведенной массы только увеличивает эту погрешность.

Исследования, посвященные проблеме продольного удара, показывают, что процесс удара тел сопровождается возбуждением в зоне контакта волн деформаций. Эти волны распространяются с определенной скоростью, осуществляя перенос энергии для воздействия на технологический объект.

Постановка задачи о продольном ударе по стержню с учетом распределенной массы стержня была сформулирована в 19 веке в работах Навье, Буссинеска, Сен-Венана. Движение поперечных сечений стержня описывалось дифференциальным уравнением в частных производных. Навье для решения этого уравнения применил метод Фурье, а Сен-Венан использовал для решения метод Даламбера.

Решение Навье было представлено в виде рядов, имеющих слабую сходимость. Это определило малую эффективность предложенного подхода. Более предпочтительным оказался подход, предложенный Сен-Венаном. Решение уравнения движения стержня представлено в виде двух неизвестных функций, одна из которых описывает прямую волну, а другая – обратную волну.

Противоположной по постановке является модель удара Герца, в которой учитывается деформация тел лишь в зоне контакта. Причем предполагается, что динамическое контактное взаимодействие тел такое же, как и статическое контактное взаимодействие. В результате задача о прямом центральном соударении упругих тел сведена к задаче о соударении двух абсолютно твердых тел с упругим элементом между телами при нелинейной упругой характеристике упругого элемента.

В основе волновой модели продольного удара Сен-Венана лежит предположение об идеально плоских торцевых сечениях соударяемых стержней. Сирс рассмотрел продольный удар стержней со сферической формой торцевых сечений. Развивая положения волновой теории удара, Сирс совместил подход Герца, учитывающий лишь местную контактную деформацию соударяемых тел, и подход Сен-Венана, учитывающий общую динамическую деформацию тел при ударе.

В 20 веке исследования продольного удара стержней получили значительное развитие. Следует отметить работы Тимошенко С. П., Николаи Е. И., Бержерона Л., Динника А. Н., Доброгурского С. О., Бидермана В. Л., Кильчевского Н. А., Гольдсмита В., Кольского Г., Лурье А. И., Шапиро Г. С., Герсеванова Н. М., Пановко Я. Г. и других.

В 60-х годах 20 века применение ударных технологий в горнодобывающей промышленности, строительстве, машиностроении, приборостроении привели к значительному количеству теоретических и экспериментальных исследований в области продольного удара. Следует отметить работы Александрова Е. В., Соколинского В. Б. [8, 9, 10, 11, 190 – 194], Мосткова В. М. [153], Беляева Ю. В. [39 – 42], Саймона Р. [183, 184], Фишера Г. [209], Флавицкого Ю. В., Хомякова К. С. [210], Хоукса И., Чакраварти П. [214], Зегжды С. А. [74, 75], Клея Р. В., Кука М. А., Кейса Р. Т. [93], Робертса А. [173], Никитина Л. В. [160 – 163], Маврина А. И. [107], Алимова О. Д., Дворникова Л. Т., Шапошникова И. Д. [12, 14, 16, 59 – 61, 218], Дворникова Л. Т., Мясникова А. А. [58, 156 – 159], Алимова О. Д., Еремьянца В. Э., Манжосова В. К. [13, 17 – 22, 65 – 68, 115 – 149], Андреева В. Д., Иванова К. И. [27 – 32, 76 – 85], Алабужева П. М., Стихановского Б. Н., Шпигелъбурда И. Я. [7], Стихановского Б. Н., Малкова О. Б. [110 – 114,197 – 202], Батуева Г. С., Голубкова Ю. В., Ефремова А. К., Федосова А. А. [34], Миттры Р. [152], Васильевского Ю. И. [48, 49], Пирса Дж. [169], Дидуха Б. И., Трифонова-Яковлева Д. А. [62], Сагомоняна А. Я. [182], Крюкова Г. М. [99 – 102], Рудакова Ю. Ф., Кудри Н. Я. [181], Абрамова Б. М., Абрамова А. Б. [1, 2], Горбунова В. Ф., Саруева Л. А. [54, 55], Саруева Л. А., Слистина А. П. [185 – 187], Родионова А. И. [174 – 180], Фабишевского К. В. [207], Никоновой И. П., Серпенинова Б. Н. [165, 166], Шелковникова И. Г. [219], Шубина А. А. [221], Грицюка В. Е. [56], Григорьева Е. Т., Тульчинской Н. Б. [57], Веклича Н. А. [50], Кириллова А. А. [92], Забылина М. И. [71 – 72], Третьякова П. В. [206], Адищева В. В., Вдовина В. Е., Кардакова В. Б. [4 – 6], Алпеевой В. А. [23 – 26], Исакова А. Л., Шмелева В. В. [86, 87], Санкина Ю. Н., Каталымова Ю. В. [88, 89], Рабиновича М. И., Трубецкова Д. И. [171], Авдеевой А. И. [3], Стойчева В. Б., Можаева И. В. [203], Жукова И. А. [70] и других.

В данной работе рассматриваются различные модели продольного удара – модель удара Герца, модель продольного удара Релея, модель продольного удара без учета распределенной массы стержня, дискретная модель продольного удара, волновые модели продольного удара. Книга будет полезна специалистам, работающим в области создания машин ударного действия, применения ударных технологий в машиностроении, строительной отрасли, приборостроении, горнодобывающей промышленности.

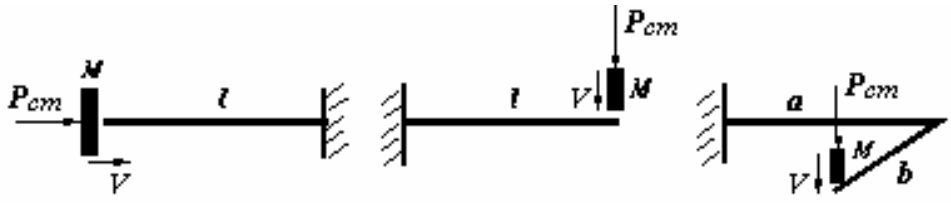
1. ПОНЯТИЕ ОБ УДАРЕ ТЕЛ. ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ МОДЕЛИ УДАРА

Удар – сложный динамический процесс, который имеет место в различных технических системах. Он может специально осуществляться для достижения того или иного технологического эффекта (ударные технологии, машины ударного действия). Удар может также возникать как побочный эффект и техническую систему в этом случае необходимо защищать от тех последствий, которые могут возникнуть при нанесении удара.

Удар, как правило, характеризуется малой длительностью процесса и значительным уровнем ударных сил. Это существенно динамический процесс, понимание которого позволяет производить грамотный расчет технической системы.

Ударом называют явление, при котором в некоторый момент времени, принимаемый за начало удара, начинают взаимодействовать элементы механической системы, движущиеся с различными скоростями. При этом материальные частицы механической системы могут иметь значительные ускорения. Если возникающие при этом силы инерции соизмеримы с заданными силами и реакциями связей, расчет механической системы необходимо вести в условиях динамического нагружения с учетом сил инерции. Такое нагружение стержня будем называть **ударным нагружением.**

На рис. 1.1 представлены некоторые типичные схемы ударного нагружения стержней: продольный удар сосредоточенной массы M по стержню (рис. 1.1, а), поперечный удар сосредоточенной массы M по консольной балке (рис. 1.1, б), удар сосредоточенной массы M по консольной раме (рис. 1.1, в), при котором на участке «a» стержень помимо поперечного удара будет испытывать крутильный удар. Предполагается, что на массу M действует сила P_{cm}, осуществляющая разгон этой массы, при котором она достигает предударной скорости v.

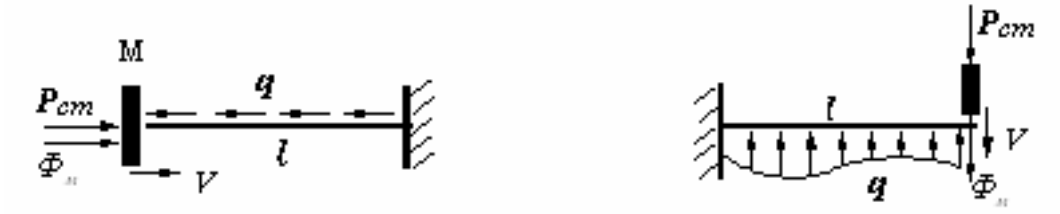


а) б) в)

Рис. 1.1. Типичные схемы ударного нагружения

Силы инерции действуют на каждую материальную точку рассматриваемой механической системы. Для стержня силы инерции являются распределенными силами. Если на схеме помимо заданных сил изображать еще и силы инерции, то приведенные на рис. 1.1 схемы ударного нагружения стержней при продольном и поперечных ударах будут выглядеть следующим образом

(рис. 1.2). На рис. 1.2 сила $\Phi_м$ – сила инерции сосредоточенной массы; q – интенсивность распределенных по стержню сил инерции.



а) б)

Рис. 1.2. Схемы ударного нагружения с изображением сил инерции

Силы инерции действуют на каждую материальную точку рассматриваемой механической системы. Для стержня силы инерции являются распределенными силами. Силы инерции при ударе являются неизвестными силами. Их величина зависит от параметров движения материальных частиц, их ускорений.

Определение параметров движения механической системы относится ко второй задаче динамики и связано с интегрированием дифференциальных уравнений, описывающих движение механической системы. Сложность той или иной модели удара стержневой системы определяется по сути моделью распределенных сил инерции стержневой системы, которую мы принимаем при анализе. В соответствии с этим рассмотрим некоторые наиболее распространенные модели удара в стержневых системах.

1.1. Модели продольного удара стержней как абсолютно твердых тел

Модель продольного удара абсолютно твердых тел основывается на том, что тела движущиеся до удара со скоростями V_1^- и V_2^- ($V_1^- > V_2^-$), после удара приобретают иные скорости V_1^+ и V_2^+ (рис. 1.3).

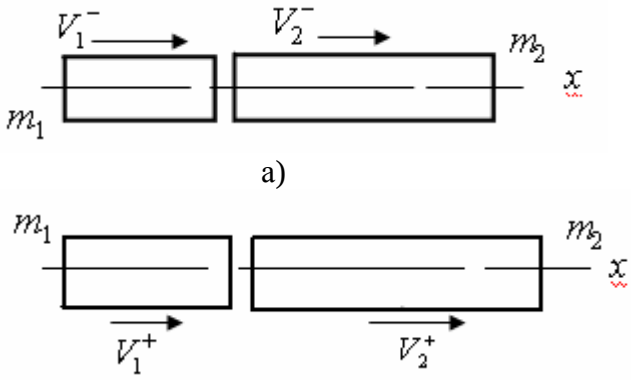


Рис.1.3. Схема продольного удара твердых тел: а) схема, характеризующая скорости тел перед ударом; б) схема, характеризующая скорости тел после удара

Так как ударная сила является внутренней силой для рассматриваемой механической системы, а внешние силы отсутствуют, то в соответствии с теоремой об изменении количества движения механической системы имеем

$$m_1 V_1^+ + m_2 V_2^+ = m_1 V_1^- + m_2 V_2^- , \qquad (1.1)$$

где m_1 и m_2 – массы соударяющихся тел.

Уравнение (1.1) не решает вопроса о состоянии системы после удара, так как содержит две неизвестные величины V_1^+ и V_2^+ (массы тел m_1 и m_2, а также их предударные скорости V_1^- и V_2^- считаем заданными). Задача является неопределенной, если ее не дополнить какими либо условиями. Эти условия определяются из представлений о характере взаимодействия соударяемых тел.

Если удар абсолютно упругий, то используется условие сохранения кинетической энергии при ударе

$$\frac{1}{2} m_1 (V_1^+)^2 + \frac{1}{2} m_2 (V_2^+)^2 = \frac{1}{2} m_1 (V_1^-)^2 + \frac{1}{2} m_2 (V_2^-)^2 . \qquad (1.2)$$

Если удар абсолютно пластичный, может быть использовано условие, что после удара тела движутся с одинаковыми скоростями $V_1^+ = V_2^+$.

Более универсальной является модель удара Ньютона, которая основывается на предположении о пропорциональной зависимости между относительными скоростями тел до и после удара

$$V_1^+ - V_2^+ = -\mathrm{R}(V_1^- - V_2^-), \qquad (1.3)$$

где R – коэффициент пропорциональности, характеризующий восстановление относительной скорости после удара.

Вследствие своей простоты ньютоновская модель удара широко используется в теории виброударных систем, когда исследуется движение соударяемых тел на больших интервалах времени, по сравнению с которыми допустимо считать удар мгновенным. Однако в практике конструирования машин важной является и другая задача – определение сил для проведения прочностных расчетов. Для решения этой задачи модель удара абсолютно твердых тел вообще неприемлема, так как предположение о мгновенном ударе приводит к необходимости считать, что при соударении возникает бесконечно большая сила. При расчете на прочность такой результат не может быть принят.

1.2. Модель удара Герца

В основе построения модели Герца лежат две гипотезы. Предполагается, что при взаимодействии соударяющихся тел существенными являются местные деформации в зоне контакта. Вторая гипотеза состоит в том, что зависимость контактной силы от контактной деформации при ударе остается такой же, как и при статическом сжатии тел.

С использованием этих гипотез модель продольного удара двух тел может быть представлена моделью удара абсолютно твердых тел, взаимодействую-

щих между собой в общем случае через нелинейный упругий элемент. Схема такого соударения представлена на рис. 1.4.

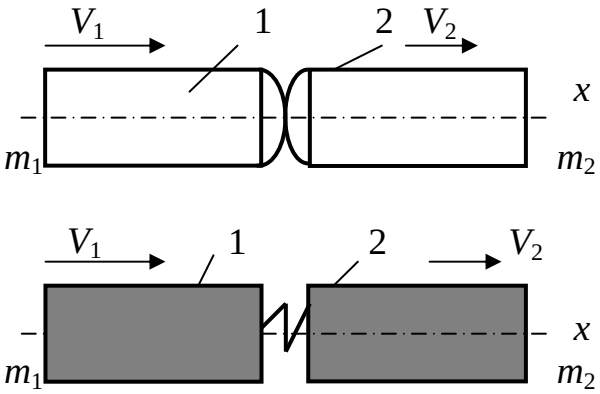


Рис. 1.4. Схема продольного удара тел с учетом контактного взаимодействия

Свойства упругого элемента, моделирующего контактные деформации соударяющихся тел, проявляются лишь при сжатии. Если обозначить через Δu сближение центров масс соударяющихся тел во время удара, то контактная сила (ударная сила) определяется выражением

$$P = \begin{cases} k(\Delta u)^{3/2}, \text{ при } & \Delta u \geq 0, \\ 0\ , & \text{при } \Delta u < 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$k = \frac{4}{3(1-\mu_1^2)/E_1 + (1-\mu_2^2)/E_2)} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}\ ,$$

где $\Delta u = u_1 - u_2$; $u_1, u_2 -$перемещение центров масс соударяющихся тел в направлении удара; $k -$коэффициент пропорциональности, зависящий от кривизны поверхностей тел в точке контакта и свойств материала; R_1, R_2 – радиусы кривизны поверхностей контакта соударяющихся тел; μ_1, μ_2 – коэффициенты Пуассона материала соударяющихся тел; E_1, E_2 – модули упругости материала.

Если соударяющиеся тела из одного и того же материала ($\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $E_1 = E_2 = E$), то

$$k = \frac{2E}{3(1-\mu^2)} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}\ .$$

Составляя дифференциальные уравнения движения для каждого из тел, можно перейти после преобразований к дифференциальному уравнению вида

$$m\frac{d^2(\Delta u)}{dt^2} = -P\,, \qquad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ , \tag{1.5}$$

где m – приведенная масса.

При интегрировании (1.5) используются начальные условия

$$\Delta u\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{d(\Delta u)}{dt}\right|_{t=0} = V_1 - V_2 = V_0 \ .$$

Однократное интегрирование (1.5) и использование условия преобразования кинетической энергии относительного движения в работу ударной силы позволяет определить максимальное сближение центров масс соударяющихся тел и максимальное значение ударной силы

$$\Delta u_{\max} = \left(\frac{5}{4}\frac{mV_0^2}{k}\right)^{\frac{2}{5}}, \qquad P_{\max} = k^{\frac{2}{5}}\left(\frac{5}{4}mV_0^2\right)^{\frac{3}{5}},$$

время ударного взаимодействия

$$t_u = 2{,}9432\left(\frac{5}{4}\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{5}} V_0^{-\frac{1}{5}} \ .$$

Для определения характера изменения ударной силы во времени необходимо интегрировать дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d(\Delta u)}{dt} = \sqrt{V_0^2 - \frac{2}{m}\int_0^{\Delta u} P d(\Delta u)}\,, \tag{1.6}$$

решение которого приближенно может быть описано [52] выражением вида

$$\Delta u = \Delta u_{\max} \sin\left(\frac{1{,}06 V_0 t}{\Delta u_{\max}}\right) \ .$$

Сила контактного взаимодействия (ударная сила) приближенно может быть определена как

$$P = \begin{cases} k\left(\Delta u_{\max} \sin\dfrac{1{,}06 V_0 t}{\Delta u_{\max}}\right)^{\frac{3}{2}}, \text{ при } 0 \le t \le t_u, \\ 0, \qquad \text{при} \quad t_u > 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Если учесть, что $P_{\max} = k(\Delta u_{\max})^{3/2}$, то относительное значение ударной силы $\tilde{P} = P / P_{\max}$ определится как

$$\tilde{P} = \begin{cases} \left(\sin\dfrac{1{,}06 V_0 t}{\Delta u_{\max}}\right)^{\frac{3}{2}}, \text{ при } 0 \le t \le t_u, \\ 0, \qquad \text{при} \quad t_u > 0. \end{cases}$$

При использовании модели контактного взаимодействия И. Я. Штаермана [168] сила контактного взаимодействия связана со сближением центров масс соударяющихся тел зависимостью

$$P = \begin{cases} k(\Delta u)^{(2n+1)/2n}, n = 1,2,..., \text{ при } \quad \Delta u \geq 0, \\ 0 \ , \qquad \text{при } \quad \Delta u < 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

При n = 1 модель Штаермана И. Я. соответствует модели Герца (1.4). При $n \to \infty$ сила контактного взаимодействия пропорциональна сближению $P = k \cdot \Delta u$ (если $\Delta u \geq 0$).

1.3. Модель Релея для описания продольного удара стержней

В общем случае при продольном ударе по стержню деформации являются функцией координаты x и времени t. Рассмотрим схему продольного удара сосредоточенной массы m_1 по стержню массой m_2 (рис. 1.5, а).

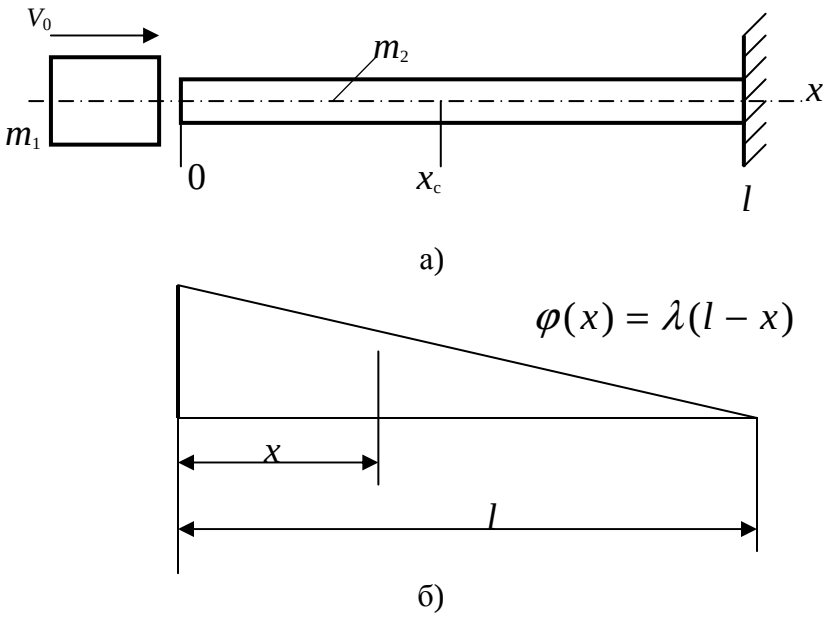


Рис. 1.5. Расчетная схема и диаграмма перемещения поперечных сечений при продольном ударе: а) расчетная схема продольного удара массы по стержню; б) функция $\varphi(x)$, определяющая перемещения поперечных сечений стержня при продольном ударе

Представим продольное перемещение поперечного сечения стержня в виде произведения двух функций

$$u(x,t) = f(t) \cdot \varphi(x), \tag{1.9}$$

где $\varphi(x)$ – функция, зависящая только от координаты; $f(t)$ – функция, зависящая только от времени.

Функция $\varphi(x)$ должна быть задана на основе представлений о характере деформирования стержня и граничных условий, функция $f(t)$ подлежит определению в процессе решения задачи. Предполагается, что в любой момент времени продольные перемещения поперечных сечений (рис. 1.5, б) равны нулю в сечении $x = l$ и пропорциональны разности $(l - x)$, т. е.

$$\varphi(x) = \lambda(l - x),$$

где λ – коэффициент пропорциональности.

Тогда

$$\varphi'(x) = -\lambda, \ \ \varphi'(0) = -\lambda, \ \ \ \varphi(0) = \lambda \cdot l.$$

Величина ударной силы равна значению продольной силы в ударном сечении стержня и может быть найдена как

$$N(0,t) = EA\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = EA \cdot f(t) \cdot \varphi'(0) = -EA \cdot f(t) \cdot \lambda \ .$$

Движение ударной массы m_1 описывается дифференциальным уравнением вида

$$m_1 \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} = N(0,t), \tag{1.10}$$

где $u(0,t)$ – перемещение ударного сечения стержня, $x = 0$ – координата ударного сечения стержня.

Так как

$$\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} = f''(t) \cdot \varphi(0),$$

то имеем

$$m_1 f''(t) \cdot \lambda l + EA\lambda \cdot f(t) = 0, \quad f''(t) + \frac{EA}{l m_1} \cdot f(t) = 0. \tag{1.11}$$

Учитывая равенство (1.11), получим

$$f''(t) + p^2 f(t) = 0, \tag{1.12}$$

где $\quad p^2 = \dfrac{EA}{m_1 l}$.

Решение (1.12) имеет вид

$$f(t) = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt. \tag{1.13}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из начальных условий

$$u(x, t_0) = 0, \quad \frac{\partial u(0, t_0)}{\partial t} = V_0, \quad t_0 = 0,$$

где V_0 – предударная скорость массы m_1.

Из начальных условий $C_1 = 0$, $C_2 = \dfrac{V_0}{p\lambda l}$. Тогда из (1.13) $f(t) = \dfrac{V_0}{p\lambda l}\sin pt$,

ударная сила

$$N(0,t) = -EA\frac{V_0}{pl}\sin pt.$$

Максимальное по модулю значение ударной силы равно

$$N_{\max} = EA\frac{V_0}{pl} = V_0\sqrt{\frac{m_1 EA}{l}}.$$

Модель удара Релея позволяет провести расчет ударной силы, оценить продолжительность удара. Однако для ее использования необходимо вводить гипотезу о распределении перемещений поперечных сечений по стержню в любой момент времени, что вносит определенный произвол в решении и в зависимости от принимаемой гипотезы может привести к различным результатам.

1.4. Модель удара сосредоточенной массы по стержню без учета распределенных сил инерции стержня

Пренебречь распределенными силами инерции можно тогда, когда масса стержня существенно мала по сравнению с массой тела, наносящего удар. Соответственно и распределенные силы инерции существенно малы по сравнению с силой инерции $\Phi_м$ ударяющего тела и ими можно пренебречь.

В этом случае, например, расчетная схема продольного удара сосредоточенной массы по стержню будет иметь вид (рис. 1.6), когда учитывается сила инерции только ударяющего тела (сила инерции $\Phi_м$).

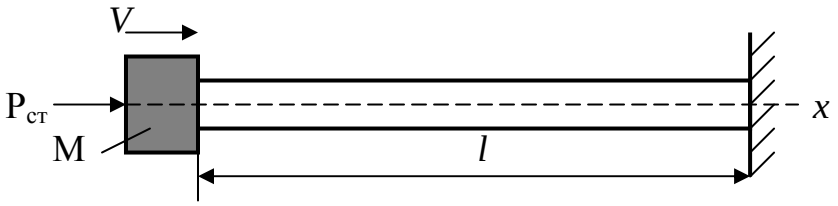


Рис. 1.6. Схема продольного удара массы по стержню

Перемещение ударного сечения Δ равно

$$\Delta = \delta \cdot P_{ст} + \delta \cdot \Phi_м, \tag{1.14}$$

где $\delta = l/EA$ – податливость стержня длиной l в ударном сечении, E – модуль упругости первого рода материала стержня, A – площадь поперечного сечения; $P_{ст}$ – сила, действующая на сосредоточенную массу M и осуществляющая ее разгон до предударной скорости v (полагаем, что $P_{ст}$ = const).

Так как сила инерции

$$\Phi_м = -M \cdot \ddot{\Delta}, \qquad (1.15)$$

где $\ddot{\Delta}$ – ускорение ударного сечения, то из (1.14) с учетом (1.15) имеем

$$\Delta = \delta \cdot P_{ст} - \delta \cdot M \cdot \ddot{\Delta},$$

а после перестановки слагаемых

$$\delta \cdot M \cdot \ddot{\Delta} + \Delta - \delta \cdot P_{ст} = 0.$$

Преобразуем последнее уравнение к виду

$$\ddot{\Delta} + \frac{1}{\delta M}(\Delta - \delta \cdot P_{ст}) = 0. \qquad (1.16)$$

Введем переменную

$$u = (\Delta - \delta \cdot P_{ст}), \qquad \Delta = u + \delta \cdot P_{ст}. \qquad (1.17)$$

Дифференцируя по t, имеем

$$\dot{u} = \dot{\Delta}, \qquad \ddot{u} = \ddot{\Delta}. \qquad (1.18)$$

Учитывая (1.17) и (1.18) в (1.16), получим уравнение

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{\delta \cdot M}}. \qquad (1.19)$$

Уравнение (1.19) – однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка, решением которого является

$$u = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \qquad (1.20)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий, t – время.
Дифференцируя (1.20) по t, получим

$$\dot{u} = -\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t. \qquad (1.21)$$

При $t = 0$ перемещение ударного сечения $\Delta_0 = 0$ и начальное значение переменной u из (1.17)

$$u_0 = -\delta \cdot P_{ст}.$$

Учитывая это значение u_0 в (1.20) при $t = 0$, получим

$$\delta \cdot P_{ст} = C_1.$$

При $t = 0$ скорость ударного сечения $\dot{\Delta}_0 = v$ и начальное значение производной $\dot{u}$ из (1.18)

$$\dot{u}_0 = v.$$

Учитывая это значение $\dot{u}_0$ в (1.21) при $t = 0$, получим

$$v = \omega C_2, \qquad C_2 = \frac{v}{\omega}.$$

Подставляя значения C_1 и C_2 в (1.20) и (1.21), имеем

$$u = -\delta \cdot P_{ст} \cos \omega t + \frac{v}{\omega} \sin \omega t,$$

$$\dot{u} = \omega \delta \cdot P_{ст} \sin \omega t + v \cos \omega t.$$

Если учесть, что

$$u = (\Delta - \delta \cdot P_{ст}), \qquad \dot{u} = \dot{\Delta},$$

то получим следующие выражения для определения перемещения и скорости ударного сечения

$$\Delta = \delta \cdot P_{ст} (1 - \cos \omega t) + \frac{v}{\omega} \sin \omega t, \tag{1.22}$$

$$\dot{\Delta} = \omega \delta P_{ст} \sin \omega t + v \cos \omega t. \tag{1.23}$$

Отношение перемещения ударного сечения Δ к податливости δ определит значение силы в ударном сечении

$$P_д = \frac{\Delta}{\delta}, \quad P_д = P_{ст} (1 - \cos \omega t) + \frac{v}{\delta\omega} \sin \omega t. \tag{1.24}$$

Длительность удара определяется тем значением $t = t_y$ ($t \neq 0$), при котором ударная сила $P_д$ становится равной нулю, т. е.

$$P_{ст} (1 - \cos \omega t) + \frac{v}{\delta\omega} \sin \omega t = 0. \tag{1.25}$$

Учитывая, что

$$1 - \cos \omega t_y = 2 \sin^2 \frac{\omega t_y}{2}, \qquad \sin \omega t_y = 2 \sin \frac{\omega t_y}{2} \cos \frac{\omega t_y}{2},$$

получим из (1.25)

$$P_{ст} \; 2 \sin^2 \frac{\omega t_y}{2} + \frac{v}{\delta\omega} \; 2 \sin \frac{\omega t_y}{2} \cos \frac{\omega t_y}{2} = 0,$$

откуда имеем $$\operatorname{tg} \frac{\omega t_y}{2} = -\frac{v}{\delta\omega P_{ст}}.$$

Длительность удара равна

$$t_y = \frac{2}{\omega} \operatorname{arctg} \left(-\frac{v}{\delta\omega P_{ст}}\right). \tag{1.26}$$

Если сила $P_{ст}$, разгоняющая ударную массу, есть величина постоянная ($P_{ст}$ = const), то скорость массы M перед ударом равна

$$v = \sqrt{\frac{2P_{cm}h}{M}},$$

где h – путь разгона массы M.

Тогда, учитывая, что $\omega = \sqrt{1/\delta M}$, получим

$$\frac{v}{\delta\omega P_{ст}} = \frac{\sqrt{\frac{2P_{ст}h}{M}}}{P_{ст}\delta\sqrt{1/\delta M}} = \sqrt{\frac{2h}{\delta P_{ст}}} = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{ст}}}, \qquad (1.27)$$

а из (1.26) длительность удара будет равна

$$t_y = \frac{2}{\omega}\,\mathrm{arctg}\,(-\sqrt{\frac{2h}{\Delta_{ст}}}). \qquad (1.28)$$

Распространены ударные системы, когда $2h/\Delta_{ст} > 10^4$. Для этих систем $\mathrm{arctg}\,(-\sqrt{\frac{2h}{\Delta_{ст}}}) \approx \pi/2$ и длительность удара может быть определена простым выражением

$$t_y = \frac{\pi}{\omega}. \qquad (1.29)$$

Для определения времени t_m, когда ударная сила $P_д$ достигнет максимального значения, продифференцируем (1.24) по t и приравняем полученное выражение при $t = t_m$ к нулю

$$\frac{dP_д}{dt} = \omega P_{ст}\sin\omega t + \frac{v}{\delta}\cos\omega t,$$

$$\omega P_{ст}\sin\omega t_m + \frac{v}{\delta}\cos\omega t_m = 0,$$

откуда

$$\mathrm{tg}\,\omega t_m = -\frac{v}{\delta\omega P_{ст}}, \quad t_m = \frac{1}{\omega}\,\mathrm{arctg}(-\frac{v}{\delta\omega P_{ст}}). \qquad (1.30)$$

Учитывая (1.27), получим

$$\mathrm{tg}\,\omega t_m = -\sqrt{\frac{2h}{\Delta_{ст}}}. \qquad (1.31)$$

В зависимости от отношения $2h/\Delta_{ст}$ значение угла (ωt_m) находится в диапазоне $\pi/2 < \omega t_m \le \pi$. Для ударных систем, когда $2h/\Delta_{ст} > 10^4$, значение $\mathrm{arctg}\,(-\sqrt{\frac{2h}{\Delta_{ст}}}) \approx \pi/2$ и время t_m, когда ударная сила достигнет максимального значения, может быть определена по формуле

$$t_m = \frac{\pi}{2\omega}. \qquad (1.32)$$

Максимальное значение ударной силы может быть определено из (1.24) при $t = t_m$

$$P_{\text{мах}} = P_{\text{ст}}(1 - \cos \omega t_m) + \frac{v}{\delta\omega} \sin \omega t_m . \qquad (1.33)$$

Так как $\cos \omega t_m = -\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\omega t_m}}$, $\sin \omega t_m = \dfrac{-tg\omega t_m}{\sqrt{1+tg^2\omega t_m}}$,

то, учитывая (1.31), имеем

$$\cos \omega t_m = -\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}}, \qquad \sin \omega t_m = \frac{\sqrt{\dfrac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}}{\sqrt{1+\dfrac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}}. \qquad (1.34)$$

Учитывая (1.34) и (1.27) в (1.33), получим

$$P_{\max} = P_{\text{ст}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}}\right) + P_{\text{ст}}\sqrt{\frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}\;\frac{\sqrt{\dfrac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}}{\sqrt{1+\dfrac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}}.$$

Последнее равенство преобразуется к виду

$$P_{\max} = P_{\text{ст}}\left(1 + \frac{1+\dfrac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}{\sqrt{1+\dfrac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}}\right) = P_{\text{ст}}\left(1 + \sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}\right). \qquad (1.35)$$

Введем понятие коэффициента динамичности как отношение

$$\kappa_{\text{д}} = \frac{P_{\max}}{P_{\text{ст}}}.$$

Учитывая (1.35), получим

$$\kappa_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}. \qquad (1.36)$$

Заметим, что при $h = 0$ (когда путь разгона ударной массы равен нулю) коэффициент динамичности $\kappa_{\text{д}} = 2$, т. е. максимальная динамическая сила $P_{\max}$ в 2 раза превышает $P_{\text{ст}}$.

При $2h/\Delta_{\text{ст}} > 10^4$ можно пренебречь единицами в (1.36) и вычислять $\kappa_{\text{д}}$ по приближенной формуле (погрешность расчета при этом не превышает 1 %)

$$\kappa_д \approx \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{ст}}}, \qquad \Delta_{ст} = \delta \cdot P_{ст}. \tag{1.37}$$

Определив коэффициент динамичности $\kappa_д$, можно найти значение максимальной силы P_{max} при ударном нагружении

$$P_{max} = k_д P_{ст}.$$

Если учесть (1.37), то

$$P_{max} = \sqrt{\frac{2h}{\delta \cdot P_{ст}}} \cdot P_{ст} = \sqrt{\frac{2h \cdot P_{ст}}{\delta}}.$$

Так как предударная скорость массы M определяется как $V_0 = \sqrt{\frac{2h \cdot P_{ст}}{M}}$, то $2h \cdot P_{ст} = MV_0^2$ и значение максимальной ударной силы с учетом, что $\delta = l / EA$, определится как

$$P_{max} = V_0 \sqrt{\frac{M\,EA}{l}}.$$

Значение динамических напряжений

$$\sigma = \kappa_д \sigma_{ст}, \quad \sigma = \frac{P_{max}}{A} = V_0 \sqrt{\frac{M\,E}{Al}}.$$

где $\sigma_{ст}$ – напряжения от действия силы $P_{ст}$.

Рассмотренная модель удара позволяет производить расчет не только максимального значения ударной силы (соответственно и напряжений), но и характера изменения этой силы во времени, длительности удара t_{max}.

В ряде случаев нас могут интересовать не временные характеристики процесса, а лишь максимальная ударная сила P_{max}. В этом случае могут быть предложены более простые приемы описания удара в стержневой системе, основанные на использовании основных теорем динамики механических систем.

1.5. Модель удара сосредоточенной массы по стержню без учета распределенных сил инерции стержня, ориентированная на определение коэффициента динамичности

Рассмотрим данную модель на примере расчета стержня при продольном ударе (рис. 1.7). В процессе движения сосредоточенной массы M выделим следующие характерные положения ударной массы и стержня:

1) ударная масса M находится на расстоянии h (рис. 1.7, а) от ударного сечения, скорость ее в начальный момент времени равна нулю ($v_0 = 0$) и в этот момент к массе приложена сила $P_{ст}$ = const, под действием которой начинается разгон ударной массы;
2) ударная масса M достигает ударного сечения (рис. 1.7, б) и наносит удар по стержню, имея перед ударом скорость v;

3) в процессе удара происходит изменение длины стержня на величину Δ (рис. 1.7, в) и скорость ударной массы падает до нуля ($v_к = 0$).

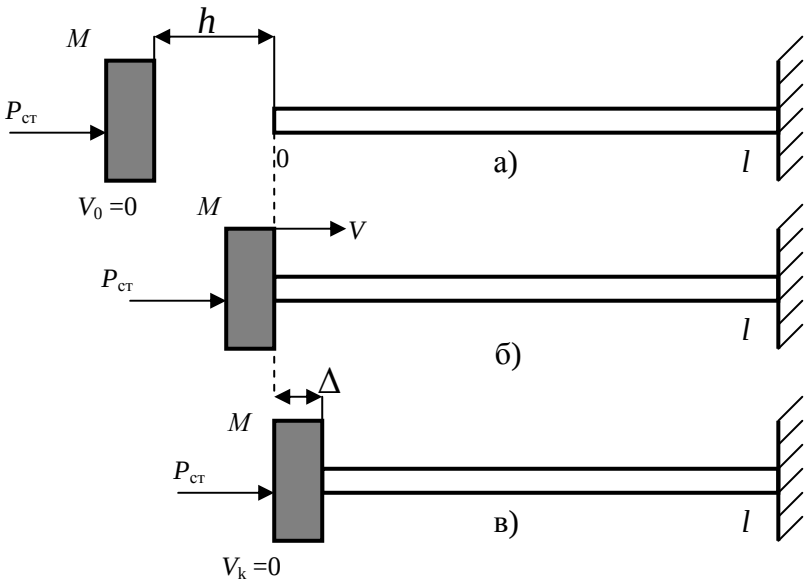


Рис. 1.7. Схема, характеризующая положения ударной массы и стержня при продольном ударе

В соответствии с теоремой об изменении кинетической энергии для ударной массы от начала ее движения до момента удара (период разгона массы) можно записать

$$T - T_0 = P_{ст}\, h, \tag{1.38}$$

где $T = \frac{1}{2}\, m\, v^2$ – кинетическая энергия ударной массы перед нанесением удара; $T_0 = 0$ – кинетическая энергия ударной массы в начале движения; h – длина участка разгона массы; $P_{ст}\, h$ – работа силы $P_{ст}$.

От начала удара до момента остановки массы имеем уравнение

$$T_к - T = P_{ст}\, \Delta - \int_0^{\Delta} P d\Delta, \tag{1.39}$$

где $T_k = 0$ – кинетическая энергия ударной массы, когда ее скорость в процессе удара упала до нуля; Δ – перемещение ударного сечения, P – ударная сила, $P_{ст}\, \Delta$ – работа силы $P_{ст}$ на перемещении Δ.

Предполагается, что ударная сила является силой, пропорциональной перемещению (закон Гука), а работа этой силы

$$\int_0^{\Delta} P d\Delta = \frac{1}{2} P_д\, \Delta,$$

где $P_д$ – максимальное по модулю значение ударной силы.
Тогда уравнение (1.39) примет вид

$$\frac{1}{2}P_{д}\Delta = P_{ст}\Delta + T,$$

а с учетом (1.38)

$$\frac{1}{2}P_{д}\Delta = P_{ст}\Delta + P_{ст}\,h.$$

Разделив левую и правую части равенства на $P_{ст}$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{P_{д}}{P_{ст}}\Delta = \Delta + h, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}\,\kappa_{д}\,\Delta = \Delta + h, \tag{1.40}$$

где $\kappa_{д} = \dfrac{P_{д}}{P_{ст}}$ – коэффициент динамичности.

По гипотезе Гука при статическом нагружении стержня силой $P_{ст}$ перемещение точки приложения силы равно

$$\Delta_{ст} = \delta \cdot P_{ст},$$

где δ – коэффициент пропорциональности, соответствующий податливости стержня в точке приложения силы $P_{ст}$.

Приняв гипотезу о том, что деформации при действии максимальной ударной силы по характеру распределения вдоль продольной оси такие, как и при статическом нагружении, запишем

$$\Delta = \delta \cdot P_{д}.$$

Тогда отношение

$$\frac{\Delta}{\Delta_{ст}} = \frac{\delta \cdot P_{д}}{\delta \cdot P_{ст}} \quad \text{или} \quad \kappa_{д} = \frac{\Delta}{\Delta_{ст}},$$

откуда

$$\Delta = \kappa_{д}\,\Delta_{ст}. \tag{1.41}$$

Учитывая (1.41) в (1.40), получим $\frac{1}{2}\kappa_{д}(\kappa_{д}\Delta_{ст}) = \kappa_{д}\Delta_{ст} + h,$

или после преобразований $\kappa_{д}^{2} - 2\kappa_{д} - \dfrac{2h}{\Delta_{ст}} = 0.$

Решая квадратное уравнение и учитывая, что коэффициент динамичности $\kappa_{д}$ должен иметь положительное значение, получим выражение для расчета коэффициента динамичности

$$\kappa_{д} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}}. \tag{1.42}$$

Если величина $\frac{h}{\Delta_{ст}} >> 1$, то в выражении (1.42) можно пренебречь единицами и производить расчет коэффициента динамичности по зависимости

$$\kappa_д = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{ст}}}. \qquad (1.43)$$

При отношении $\frac{2h}{\Delta_{ст}} > 10^3$ погрешность расчета по формуле (1.43) не превышает 3 %. При отношении $\frac{2h}{\Delta_{ст}} > 10^4$ погрешность расчета не превышает 1 %.

Если $h = 0$ (случай внезапно приложенной к стержню силы $P_{ст}$), то коэффициент динамичности $\kappa_д = 2$.

Для расчета коэффициента динамичности $\kappa_д$ по выражениям (1.42) и (1.43) необходимо располагать данными о величине $\Delta_{ст}$, которая соответствует перемещению точки приложения силы $P_{ст}$ в направлении действия этой силы.

При продольном ударе $\Delta_{ст}$ – это продольное перемещение точки приложения $P_{ст}$. Величина $\Delta_{ст}$ при заданном $P_{ст}$ определяется податливостью δ.

1.6. Модель удара сосредоточенной массы по стержню, ориентированная на определение коэффициента динамичности с учетом приведенной массы стержня

Рассмотрим теперь особенности расчета стержня при ударном нагружении с учетом его массы. В качестве расчетной схемы примем вновь схему продольного удара. Массу стержня учтем в виде некоторой приведенной массы m_n, сосредоточенной в ударном сечении (рис. 1.8).

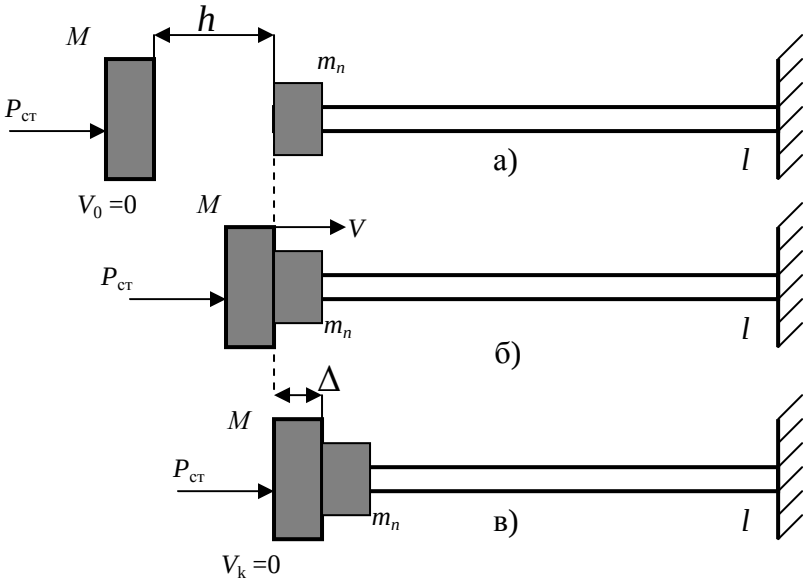


Рис. 1.8. Схема продольного удара с учетом приведенной массы стержня

В процессе движения выделим следующие характерные положения ударной массы и стержня:

1) ударная масса M находится на расстоянии h (рис. 1.8, а) от ударного сечения, скорость ее в начальный момент времени равна нулю ($v_0 = 0$) и в этот момент к массе приложена сила $P_{ст}$ = const, под действием которой начинается разгон ударной массы;
2) ударная масса M достигает ударного сечения (рис. 1.8, б) и наносит удар по стержню, имея перед ударом скорость v;
3) в момент начала взаимодействия масс M и m_n (начала процесса удара и их совместного движения) скорость этих масс становится равной величине v_1;
4) в процессе удара происходит перемещение ударного сечения стержня на величину Δ (рис. 1.8, в), скорость ударной массы M и приведенной массы m_n падает до нуля ($v_к = 0$).

В соответствии с теоремой об изменении кинетической энергии для ударной массы от начала ее движения до момента удара (период разгона массы) можно записать

$$T - T_0 = P_{ст}\, h,$$

где $T = \frac{1}{2} M v^2$ – кинетическая энергия ударной массы перед нанесением удара; $T_0 = 0$ – кинетическая энергия ударной массы в начале движения; h – длина участка разгона массы; $P_{ст}\, h$ – работа силы $P_{ст}$.

Из данного равенства

$$\frac{1}{2} M v^2 = P_{ст} h,$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2P_{ст}\, h}{M}}. \qquad (1.44)$$

Как только ударная масса M войдет в соприкосновение с массой m_n в ударном сечении, начнется их совместное движение с начальной скоростью v_1, которая определится из закона сохранения количества движения масс

$$M v = (M + m_n)\, v_1, \qquad v_1 = \frac{M}{M + m_n} v. \qquad (1.45)$$

От начала удара до момента остановки масс M и m_n имеем

$$T_k - T_1 = P_{ст}\, \Delta - \int_0^{\Delta} P d\Delta\ , \qquad T_1 = \frac{1}{2}(M + m_n) v_1^2\,, \qquad (1.46)$$

где T_1 – кинетическая энергия масс M и m_n в начале их совместного движения; $T_к = 0$ – кинетическая энергия масс M и m_n в конце их движения, когда их скорость упала до нуля.

Полагаем, что ударная сила P является силой, пропорциональной перемещению ударного сечения Δ (закон Гука), а работа этой силы

$$\int_0^{\Delta} P d\Delta = \frac{1}{2} P_{д} \Delta,$$

где $P_{д}$ – максимальное по модулю значение ударной силы.
Тогда из уравнения (1.46) имеем

$$\frac{1}{2} P_{д} \Delta = P_{ст} \Delta + T_1.$$

Разделив левую и правую части равенства на $P_{ст}$, получим

$$\frac{1}{2} \frac{P_{д}}{P_{ст}} \Delta = \Delta + \frac{T_1}{P_{ст}},$$

или

$$\frac{1}{2} \kappa_{д} \Delta = \Delta + \frac{T_1}{P_{ст}}, \qquad \kappa_{д} = \frac{P_{д}}{P_{ст}},$$

где $\kappa_{д}$ – коэффициент динамичности.
Учитывая (1.41), когда $\Delta = k_{д} \Delta_{ст}$, получим

$$\frac{1}{2} \kappa_{д}^2 \Delta_{ст} = \kappa_{д} \Delta_{ст} + \frac{T_1}{P_{ст}},$$

откуда следует уравнение

$$\kappa_{д}^2 - 2 \kappa_{д} - \frac{2T_1}{P_{ст} \Delta_{ст}} = 0, \qquad (1.47)$$

Решение квадратного уравнения (1.47) имеет вид

$$\kappa_{д} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_1}{P_{ст} \Delta_{ст}}}. \qquad (1.48)$$

Если учесть, что

$$T_1 = \frac{1}{2}(M + m_n) v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{M^2}{M + m_n} \mathrm{v}^2,$$

а с учетом (1.44)

$$T_1 = \frac{1}{2} \frac{M^2}{M + m_n} \frac{2P_{ст} h}{M} = \frac{P_{ст} h}{1 + \frac{m_n}{M}},$$

то подставляя значение T_1 в (1.48), получим

$$\kappa_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}(1 + \frac{m_n}{M})}}\,. \qquad (1.49)$$

Выражение (1.49) для расчета коэффициента динамичности является более общим, так как из него как частный случай следует (1.42), когда $m_n = 0$.

Для расчета коэффициента динамичности по (1.49) необходимо располагать значением приведенной массы стержня m_n, сосредоточенной в ударном сечении. Обозначим отношение m_n к массе стержня m_c как

$$\frac{m_n}{m_c} = \beta\,, \qquad 0 < \beta < 1.$$

Значение приведенной массы принимается таким, чтобы кинетическая энергия этой массы была равна кинетической энергии стержня, т. е.

$$\frac{1}{2}\, m_n\, v_1^2 = T_c\,, \qquad (1.50)$$

где $T_c = \int_l \frac{1}{2} v_x^2 dm$ – кинетическая энергия стержня; v_x – скорость элементарного участка стержня dx; $dm = \rho A dx$ – масса элементарного участка; ρ – плотность материала стержня; A – площадь поперечного сечения.

Таким образом, из (1.50) следует

$$\frac{1}{2}\, m_n\, v_1^2 = \int_l \frac{1}{2} v_x^2 \rho A dx$$

или

$$m_n = \int_l \left(\frac{v_x}{v_1}\right)^2 \rho A dx\,. \qquad (1.51)$$

Для $\rho = \text{const}$, $A = \text{const}$ из (1.51) следует

$$m_n = \rho A \int_l \left(\frac{v_x}{v_1}\right)^2 dx\,.$$

Разделив левую и правую части равенства на m_c, получим

$$\frac{m_n}{m_c} = \frac{\rho A}{m_c} \int_l \left(\frac{v_x}{v_1}\right)^2 dx\,.$$

Если учесть, что масса стержня $m_c = \rho A l$, то

$$\frac{m_n}{m_c} = \frac{1}{l} \int_l \left(\frac{v_x}{v_1}\right)^2 dx\,.$$

Если принять гипотезу, что распределение скоростей поперечных сечений v_x соответствует их перемещениям Δ_x, то

$$\frac{v_x}{v_1} = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad \frac{m_n}{m_c} = \beta,$$

тогда

$$\beta = \frac{1}{l}\int_l \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}\right)^2 dx.$$

Учитывая также, что

$$\Delta_x = k_д\, \Delta_{x\,ст}, \qquad \Delta = \kappa_д\, \Delta,$$

получим

$$\beta = \frac{1}{l}\int_l \left(\frac{\Delta_{x\,ст}}{\Delta_{ст}}\right)^2 dx, \tag{1.52}$$

где $\Delta_{x\,ст}$ – перемещение поперечного сечения стержня, положение которого определяется координатой x при приложении к ударному сечению силы $P_{ст}$.

На рис. 1.9 для примера показаны схемы нагружения стержня силой $P_{ст}$ в ударном сечении и единичной силой в произвольном сечении x. Здесь же показаны соответствующие этим нагружениям эпюры продольной силы N_p от действия силы $P_{ст}$ и $\overline{N}_1$ от действия единичной силы (рис. 1.9).

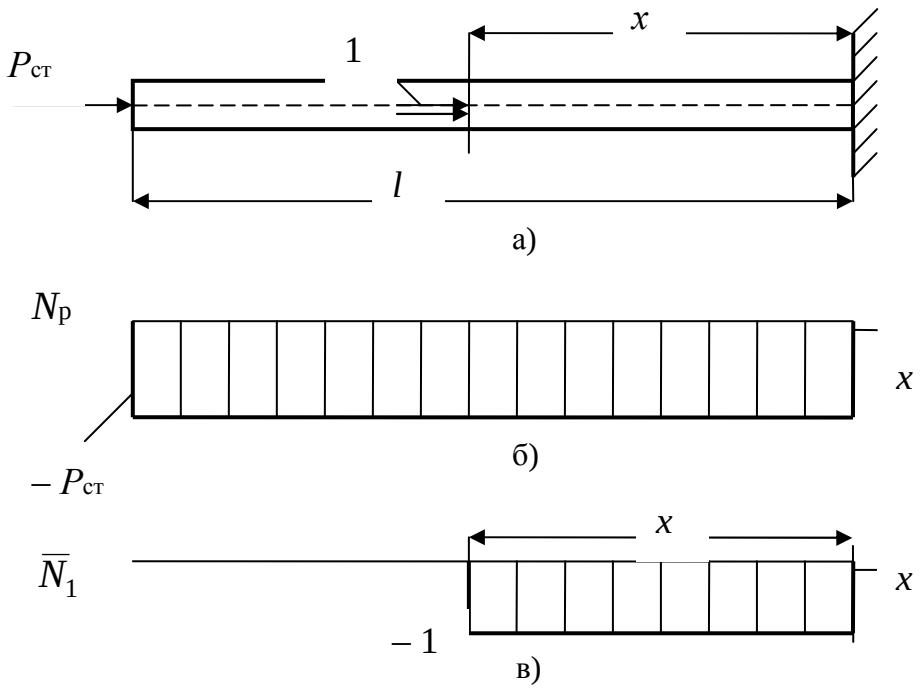


Рис. 1.9. Расчетная схема (а), эпюра продольной силы $N_р$ от действия на стержень силы $P_{ст}$ (б), эпюра продольной силы $\overline{N}_1$ от действия на стержень единичной силы (в)

Перемещение Δ_x произвольного сечения стержня при действии силы $P_{ст}$ в ударном сечении можно определить с помощью интегралов Мора. В частности, для схемы нагружения (рис. 1.9)

$$N_p = P_{ст}, \quad \overline{N}_1 = 1, \quad 0 \le x \le l$$

$$\Delta_x = \int_l \frac{N_p \overline{N}_1}{EA} dx = \int_0^x \frac{P_{ст}}{EA} dx = \frac{P_{ст}}{EA} \cdot x, \qquad 0 \le x \le l$$

где x – координата сечения, где приложена единичная сила и перемещение которого и определяет величину Δ_x.
Для схемы (рис. 1.9)

$$\Delta_{ст} = \delta \cdot P_{ст}, \qquad \delta = \frac{l}{EA}, \qquad \Delta_{ст} = \frac{l}{EA} P_{ст}.$$

Тогда из (1.52) для схемы (рис. 1.9)

$$\beta = \frac{1}{l} \int_0^l \left(\frac{x}{l}\right)^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, вычислив β для той или иной схемы нагружения, можно определить $m_n = \beta m_c$, и, подставив в (1.49), найти значение коэффициента динамичности

$$\kappa_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}(1 + \beta \frac{m_n}{M})}},$$

или с учетом, что $\Delta_{ст} = \delta \cdot P_{ст}$

$$\kappa_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta \cdot P_{ст}(1 + \beta \frac{m_n}{M})}}.$$

1.7. Энергетическая модель удара

Известны довольно простые приемы расчета максимальной ударной силы при соударении тел [87, 167], базирующиеся на использовании теоремы об изменении кинетической энергии механической системы и гипотез о характере деформирования соударяемых тел. Назовем такие модели удара энергетическими.

Рассмотрим схему продольного удара, представленную на рис. 1.10. Стержень 1 массой m_1, имея скорость V_0 в направлении продольной оси x, на-

носит удар по левому торцу стержня 2 длиной l, правый торец которого взаимодействует с абсолютно жесткой преградой. Масса стержня равна m_2.

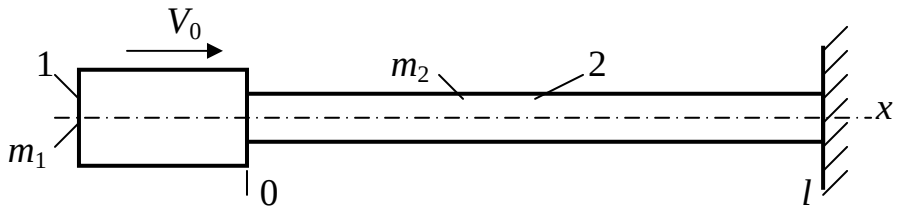


Рис. 1.10. Схема продольного удара стержня 1 по стержню 2

Предполагается, что в момент остановки стержня 1 ударная сила достигает максимального значения $P_{\max}$ и кинетическая энергия T_1 ударяющего стержня 1 преобразуется в потенциальную энергию деформации соударяющихся тел. Предполагается также, что все поперечные сечения стержней 1 и 2 находятся в одинаковом напряженном состоянии и продольная деформация ε в поперечных сечениях одна и та же. В результате приходим к равенствам

$$\frac{1}{2}m_1V_0^2 = \frac{1}{2}c_1\Delta l_1^2 + \frac{1}{2}c_2\Delta l_2^2, \tag{1.53}$$

$$P_{\max} = c_1\Delta l_1, \quad P_{\max} = c_2\Delta l_2, \tag{1.54}$$

где $c_1 = \dfrac{E_1A_1}{l_1}$ – продольная жесткость стержня 1, $c_2 = \dfrac{E_2A_2}{l_2}$ – продольная жесткость стержня 2, E_1, E_2 – модули упругости материала соответственно стержней 1 и 2, A_1, A_2 – площади поперечных сечений стержней 1 и 2, l_1, l_2 – длина стержней 1 и 2.

Из равенств (1.54) $\Delta l_1 = \dfrac{c_2}{c_1}\Delta l_2$. Подставляя в (1.53), получим

$$m_1V_0^2 = c_2{}^2\Delta l_2^2\,\frac{c_1+c_2}{c_1\cdot c_2}, \quad m_1V_0^2 = P_{\max}^2\,\frac{c_1+c_2}{c_1\cdot c_2},$$

откуда

$$P_{\max} = V_0\sqrt{m_1\,\frac{c_2}{1+c_2/c_1}}.$$

Если продольная жесткость стержня 1 $c_1 \to \infty$ (удар абсолютно твердым телом), то

$$P_{\max} = V_0\sqrt{m_1\cdot c_2}, \quad P_{\max} = V_0\sqrt{m_1\cdot\frac{E_2A_2}{l_2}}.$$

Рассмотренная модель продольного удара позволяет сравнительно просто оценить максимальное значение ударной силы. Однако данный подход базируется на произвольных предположениях о характере деформирования соударяемых тел, которые не являются очевидными.

Так в работе [91] дан пример расчета максимальных напряжений, возникающих при продольном ударе упругого стержня 1 о жесткую преграду 2. Схема удара стержня о преграду приведена на рис. 1.11.

Предполагается, что деформации и напряжения в поперечных сечениях стержня распределены по длине стержня по линейному закону. На левом торце стержня (при $x = 0$) они равны нулю, а в ударном сечении (при $x = l$) они достигают максимального значения. Распределение напряжений в стержне аппроксимируется линейной функцией

$$\sigma_x = \sigma_l \frac{x}{l},$$

где x – координата поперечного сечения, σ_l – напряжения в ударном сечении.

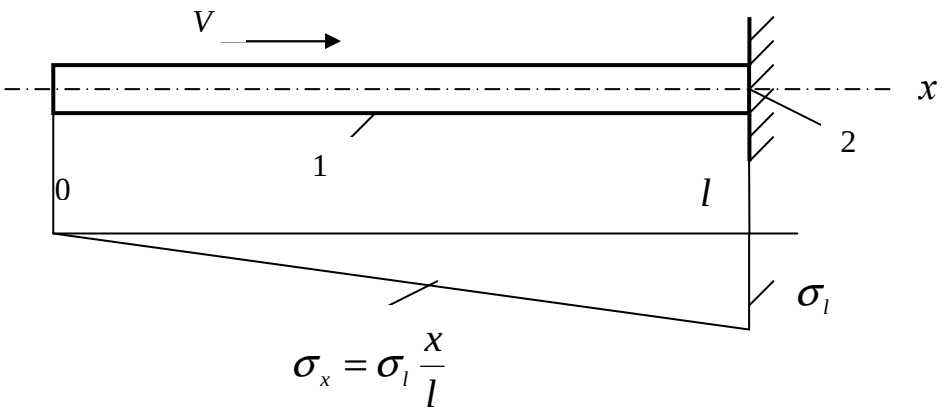


Рис. 1.11. Схема продольного удара однородного стержня о жесткую преграду

Предполагается, что в момент, когда в ударном сечении возникают максимальные напряжения $\sigma_l = \sigma_{\max}$, кинетическая энергия стержня перед ударом преобразуется в потенциальную энергию упругой деформации стержня

$$\frac{1}{2} mV^2 = \int_0^l \frac{\sigma_x^2 A}{2E} dx, \quad \frac{1}{2} mV^2 = \frac{\sigma_{\max}^2 Al}{6E}, \tag{1.55}$$

где m – масса стержня, A – площадь поперечного сечения стержня, E – модуль упругости материала стержня.

Из равенства (1.55) следует, что

$$\sigma_{\max} = V\sqrt{\frac{3mE}{A \cdot l}} = V\sqrt{\frac{3\rho\, AlE}{A \cdot l}} = V\sqrt{3\rho E}, \tag{1.56}$$

где ρ – плотность материала стержня.

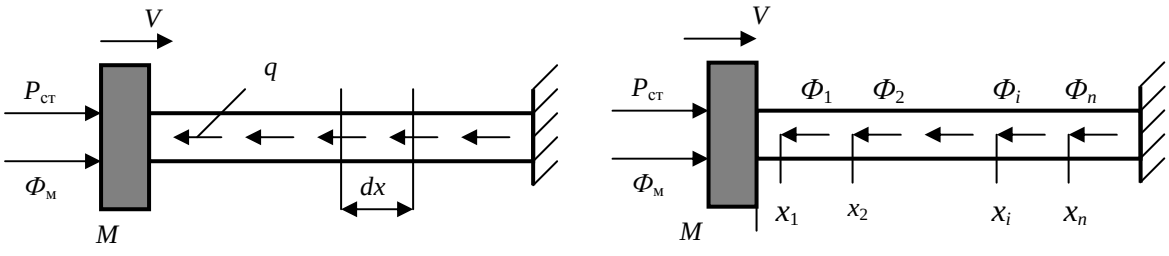
Известно точное решение задачи упругого продольного удара однородного стержня о жесткую преграду [9, 17, 168], когда учитывается распределенная масса стержня. Максимальное по модулю значение напряжений в ударном сечении определяется выражением

$$\sigma_{\max} = V\sqrt{\rho E}\,. \qquad (1.57)$$

Значения напряжений по (1.56) в 1,73 раза превышает значения напряжений по (1.57) и связано это с некорректным предположением о характере деформирования стержня при ударе.

1.8. Модель удара, когда распределенные силы инерции стержневой системы заменены множеством сосредоточенных сил или масс (дискретная модель)

Рассмотрим данную модель на примере продольного удара сосредоточенной массы по стержню (рис. 1.12, а).



а) б)

Рис. 1.12. Расчетные схемы продольного удара: а) схема продольного удара массы по стержню; б) схема сил инерции в ударной системе

На схеме $P_{ст}$ – сила, разгоняющая массу M; $\Phi_м$ – сила инерции массы M, q – интенсивность распределенных сил инерции.

Разделим стержень условно на n участков и заменим распределенные силы инерции каждого участка сосредоточенными силами инерции $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ (рис. 1.12, б), приложенными в точках продольной оси с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяют положение центра масс соответствующего участка.

Продольные перемещения точек продольной оси с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_м$ определяются уравнениями

$$u_1 = \delta_{11}\Phi_1 + \delta_{12}\Phi_2 + \ldots + \delta_{1n}\Phi_n + \delta_{1м}\Phi_м + \delta_{1м}P_{ст}\,,$$

$$u_2 = \delta_{21}\Phi_1 + \delta_{22}\Phi_2 + \ldots + \delta_{2n}\Phi_n + \delta_{2м}\Phi_м + \delta_{2м}P_{ст}\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$u_n = \delta_{n1}\Phi_1 + \delta_{n2}\Phi_2 + \ldots + \delta_{nn}\Phi_n + \delta_{nм}\Phi_м + \delta_{nм}P_{ст}\,, \qquad (1.58)$$

$$u_м = \delta_{м1}\Phi_1 + \delta_{м2}\Phi_2 + \ldots + \delta_{мп}\Phi_n + \delta_{мм}\Phi_м + \delta_{мм}P_{ст},$$

где δ_{ik} – продольные перемещения в точке с координатой x_i, вызванные продольной единичной силой, действующей в точке с координатой $x_к$,

$$\delta_{ik} = \int_l \frac{\overline{N}_i \overline{N}_k}{EJ_z} dx, \quad \delta_{ik} = \delta_{ki},$$

$\overline{N}_i$, $\overline{N}_k$ – продольные силы в поперечных сечениях стержня, вызванные соответственно единичными силами, приложенными в точках с координатами x_i и x_k.

Учитываем, что

$$\Phi_1 = -m_1\ddot{u}_1, \Phi_2 = -m_2\ddot{u}_2, \ldots, \Phi_n = -m_n\ddot{u}_n, \Phi_м = -M\ddot{u}_м, \tag{1.59}$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ – массы 1-го, 2-го, . ., n-го участков стержня; $\ddot{u}_1$, $\ddot{u}_2$, .., $\ddot{u}_n$ – ускорения центров масс 1-го, 2-го, . . , n-го участков.
Тогда из (1.58) с учетом (1.59) следует

$$u_1 = -\delta_{11}\cdot m_1\ddot{u}_1 - \delta_{12}\cdot m_2\ddot{u}_2 - \ldots - \delta_{1n}\cdot m_n\ddot{u}_n - \delta_{1м}\cdot M\ddot{u}_м + \delta_{1м}\cdot P_{ст},$$

$$u_2 = -\delta_{21}\cdot m_1\ddot{u}_1 - \delta_{22}\cdot m_2\ddot{u}_2 - \ldots - \delta_{2n}\cdot m_n\ddot{u}_n - \delta_{2м}\cdot M\ddot{u}_м + \delta_{2м}\cdot P_{ст},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{1.60}$$

$$u_n = -\delta_{n1}\cdot m_1\ddot{u}_1 - \delta_{n2}\cdot m_2\ddot{u}_2 - \ldots - \delta_{nn}\cdot m_n\ddot{u}_n - \delta_{nм}\cdot M\ddot{u}_м + \delta_{nм}\cdot P_{ст},$$

$$u_м = -\delta_{м1}\cdot m_1\ddot{u}_1 - \delta_{м2}\cdot m_2\ddot{u}_2 - \ldots - \delta_{мп}\cdot m_n\ddot{u}_n - \delta_{мм}\cdot M\ddot{u}_м + \delta_{мм}\cdot P_{ст}.$$

Система дифференциальных уравнений (1.60) описывает по сути механическую систему, когда распределенная масса стержня заменена массами участков стержня, сосредоточенными в центрах масс этих участков (в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Расчетная схема такой системы представлена на рис. 1.13.

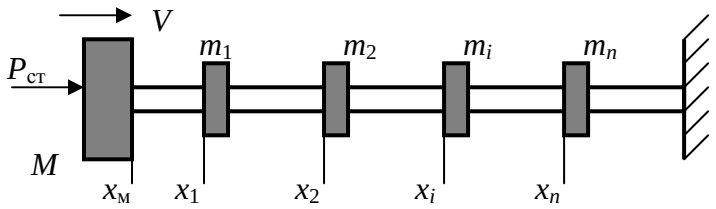


Рис. 1.13. Схема замены распределенной массы стержня множеством сосредоточенных масс

Это дискретная модель стержневой системы. Чем большее количество сосредоточенных масс заменяет массу стержня, тем точнее дискретная модель будет соответствовать модели стержневой системы с распределенной массой. Однако описание такой системы и процедура ее анализа становится громоздкой.

Если, например, масса стержня m_c существенно меньше ударной массы M ($m_c << M$), то можно пренебречь массой участков (рис. 1.14, а), приняв ($m_1 = 0, m_2 = 0, . . , m_n = 0$).

Тогда из (1.60) имеем $u_м = -\delta_{мм} \cdot M\ddot{u}_м + \delta_{мм} \cdot P_{ст}$, или

$$\ddot{u}_м + \frac{1}{\delta_{мм} M}(u_м - \delta_{мм} \cdot P_{ст}) = 0. \qquad (1.61)$$

Уравнение (1.61) описывает свободные колебания механической системы с одной степенью свободы.

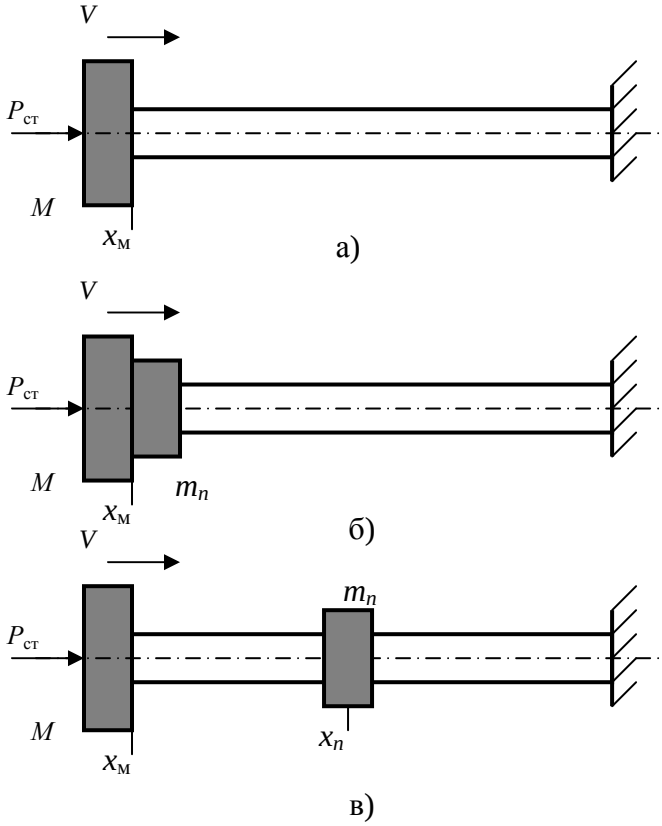


Рис. 1.14. Схемы продольного удара: а) схема продольного удара без учета массы стержня; б) схема продольного удара с учетом приведенной массы стержня, расположенной в ударном сечении; в) схема продольного удара с учетом приведенной массы стержня, расположенной в сечении x_n

Если массу стержня учесть некоторой приведенной массой m_n, сосредоточенной в ударном сечении (рис. 1.14, б), то из (1.60) следует

$$u_м = -\delta_{мм} \cdot (M + m_n)\, \ddot{u}_м + \delta_{мм} \cdot P_{ст},$$

или

$$\ddot{u}_м + \frac{1}{\delta_{мм}(M + m_.)}(u_м - \delta_{мм} \cdot P_{ст}) = 0. \qquad (1.62)$$

Уравнение (1.62) также описывает свободные колебания механической системы с одной степенью свободы.

Если массу стержня учесть некоторой приведенной массой m_n, сосредоточенной в точке x_n (рис. 1.14, в), то из (1.60) следует

$$u_n = -\delta_{nn} \cdot m_n \ddot{u}_{\text{п}} - \delta_{nm} \cdot M\ddot{u}_{\text{м}} + \delta_{nm} \cdot P_{\text{ст}},$$

$$u_м = -\delta_{mm} \cdot M\ddot{u}_{\text{м}} + \delta_{mm} \cdot P_{\text{ст}}, \qquad (1.63)$$

Система дифференциальных уравнений (1.63) описывает движение механической системы с двумя степенями свободы. Процедура описания движения системы может быть распространена, когда число масс, заменяющих массу стержня, равно двум, трем и так далее.

Распространена и другая форма описания движения сосредоточенных масс при продольном ударе механической системы, схема которой представлена на рис. 1.15.

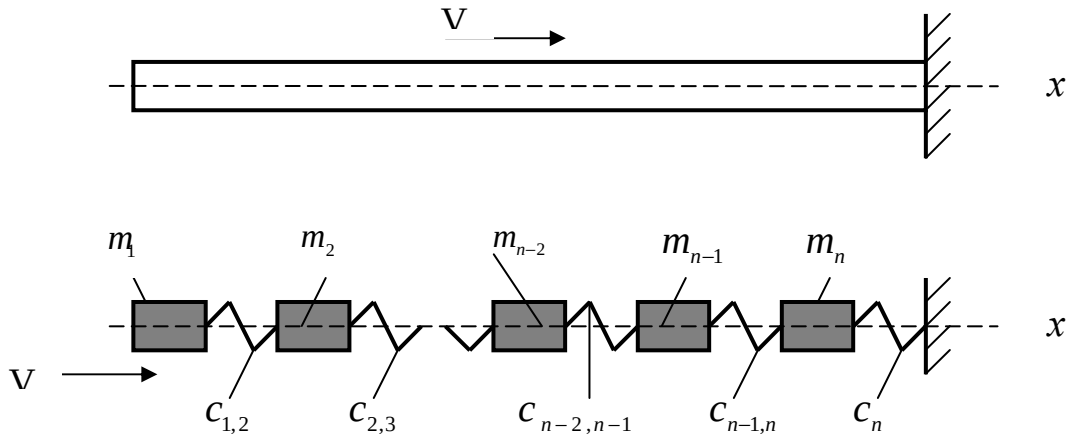


Рис. 1.15. Схема продольного удара однородного стержня о жесткую преграду

Для любой произвольной массы m_i уравнение движения можно записать в виде

$$m_i \ddot{u}_i = \sum P_{jx},$$

где $\ddot{u}_i$ – ускорение массы m_i, $\sum P_{jx}$ – сумма проекций на продольную ось x сил, действующих на массу m_i.

Движение сосредоточенных масс механической системы (рис. 1.15) в процессе удара описывается системой уравнений

$$M\,\ddot{u}_M = P_{\text{ст}} - c_1(u_M - u_1),$$

$$m_1\,\ddot{u}_1 = c_1(u_M - u_1) - c_{1,2}(u_1 - u_2),$$

$$m_2\,\ddot{u}_2 = c_{1,2}(u_1 - u_2) - c_{2,3}(u_2 - u_3),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m_{n-1}\,\ddot{u}_{n-1} = c_{n-2,n-1}(u_{n-2} - u_{n-1}) - c_{n-1,n}(u_{n-1} - u_n),$$

$$m_n\,\ddot{u}_n = c_{n-1,n}(u_{n-1} - u_n) - c_n u_n,$$

где c_1 – продольная жесткость участка стержня между массой M и массой m_1, $c_{1,2}$, $c_{2,3}$, …, $c_{n-2,n-1}$, $c_{n-1,n}$ – продольные жесткости участков стержня между соответствующими массами, c_n – продольная жесткость участка стержня между массой m_n и жесткой преградой.

При продольном ударе со скоростью v однородного стержня массой m_c о жесткую преграду стержень может быть представлен n-м количеством сосредоточенных масс m_1, m_2, …, m_{n-2}, m_{n-1}, m_n с упругими элементами жесткостью $c_{1,2}$, $c_{2,3},\ldots,c_{n-2,n-1},c_{n-1,n},c_n$ (рис. 1.15). Причем

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-2} + m_{n-1} + m_n = m_c, \quad m_c = \rho A\, l,$$

$$1/c_{1,2} + 1/c_{2,3} + \ldots + 1/c_{n-2,n-1} + 1/c_{n-1,n} + 1/c_n = 1/c, \quad c = \frac{EA}{l},$$

$$c_{1,2} = \frac{EA}{l_{1,2}}, \; c_{2,3} = \frac{EA}{l_{2,3}}, \ldots, \; c_{n-2,n-1} = \frac{EA}{l_{n-2,n-1}}, \; c_{n-1,n} = \frac{EA}{l_{n-1,n}}, \; c_n = \frac{EA}{l_n},$$

где ρ – плотность материала стержня, A – площадь поперечного сечения стержня, l – длина стержня, E – модуль упругости первого рода материала стержня, $l_{1,2}$ – длина участка стержня между массами m_1 и m_2, $l_{2,3}$ – длина участка стержня между массами m_2 и m_3, $l_{n-2,n-1}$ – длина участка стержня между массами m_{n-2} и m_{n-1}, $l_{n-1,n}$ – длина участка стержня между массами m_{n-1} и m_n, l_n – длина участка стержня между массами m_n и жесткой преградой.

В наиболее простом случае, когда сосредоточенные массы и длины участков равны

$$m = m_1 = m_2 = \ldots = m_{n-2} = m_{n-1} = m_n = m_c/n,$$

$$l_{1,2} = l_{2,3} = \ldots = l_{n-2,n-1} = l_{n-1,n} = l_n = l/n,$$

движение сосредоточенных масс описывается системой дифференциальных уравнений

$$m_1 \ddot{u}_1 = -c_{1,2}(u_1 - u_2),$$

$$m_2 \ddot{u}_2 = c_{1,2}(u_1 - u_2) - c_{2,3}(u_2 - u_3),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m_{n-1} \ddot{u}_{n-1} = c_{n-2,n-1}(u_{n-2} - u_{n-1}) - c_{n-1,n}(u_{n-1} - u_n),$$

$$m_n \ddot{u}_n = c_{n-1,n}(u_{n-1} - u_n) - c_n u_n,$$

$$m = m_1 = m_2 = \ldots = m_{n-2} = m_{n-1} = m_n = m_c/n,$$

$$c = c_{1,2} = c_{2,3} = \ldots = c_{n-2,n-1} = cl_{n-1,n} = c_n = \frac{nEA}{l}.$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений представляется в виде ряда [168]

$$u_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{a_s \cos(i-1/2)\mu_s}{\sin(\mu_s/2)} \sin k_s t, \; i = 1, 2, \ldots, n, \quad s = 1, 2, \ldots, n,$$

где $$a_s = \frac{V}{2n+1}\sqrt{\frac{m}{c}}\frac{(-1)^{s-1}}{\mathrm{tg}(\mu_s/2)}, \qquad \mu_s = \frac{\pi(2s-1)}{2n+1},$$

$$k_s = 2\sin\frac{\pi(2s-1)}{2(2n+1)}\sqrt{\frac{c_i}{m_i}}, \quad c_i = c, \quad m_i = m.$$

После соответствующих преобразований решение принимает вид

$$u_i = \frac{V\tau_\infty}{2n(2n+1)}\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\frac{\cos(i-1/2)\mu_s}{\sin(\mu_s/2)\cdot\mathrm{tg}(\mu_s/2)}\sin\left[4n\frac{t}{\tau_\infty}\sin(\mu_s/2)\right],$$

где $\tau_\infty = 2l\sqrt{\rho/E}$ – продолжительность удара при числе сосредоточенных масс $n \to \infty$.

На рис. 1.16 приведены диаграммы изменения во времени относительного значения ударной силы в ударном сечении при различном числе сосредоточенных масс.

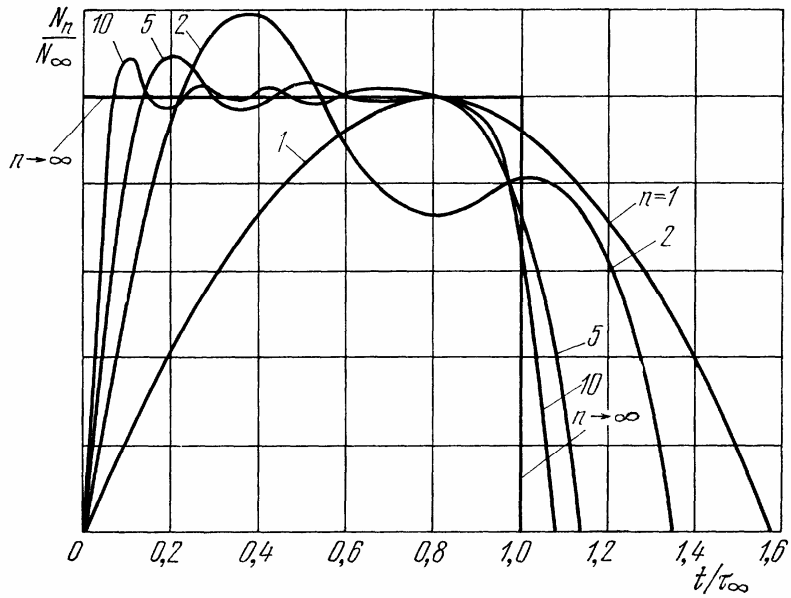


Рис. 1.16. Диаграммы изменения во времени сил в ударном сечении [168]

Относительное значение ударной силы равно

$$\widetilde{P}(l,t) = \frac{N_n}{N_\infty},$$

где N_n – значение ударной силы в ударном сечении при числе сосредоточенных масс, равным n; N_∞ – значение ударной силы в ударном сечении при числе сосредоточенных масс, стремящимся к бесконечности ($n \to \infty$).

2. ВОЛНОВЫЕ МОДЕЛИ ПРОДОЛЬНОГО УДАРА С УЧЕТОМ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИЛ ИНЕРЦИИ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

2.1. Волновая модель продольного удара сосредоточенной массы по стержню, взаимодействующему с абсолютно жесткой преградой (модель продольного удара Сен-Венана)

Рассмотрим схему продольного удара сосредоточенной массы по стержню (рис. 2.1, а). Масса M имеет предударную скорость V_0 и наносит удар по стержню длиной l, взаимодействующему с абсолютно жесткой преградой. Предполагается, что при продольном ударе справедлива гипотеза плоских сечений.

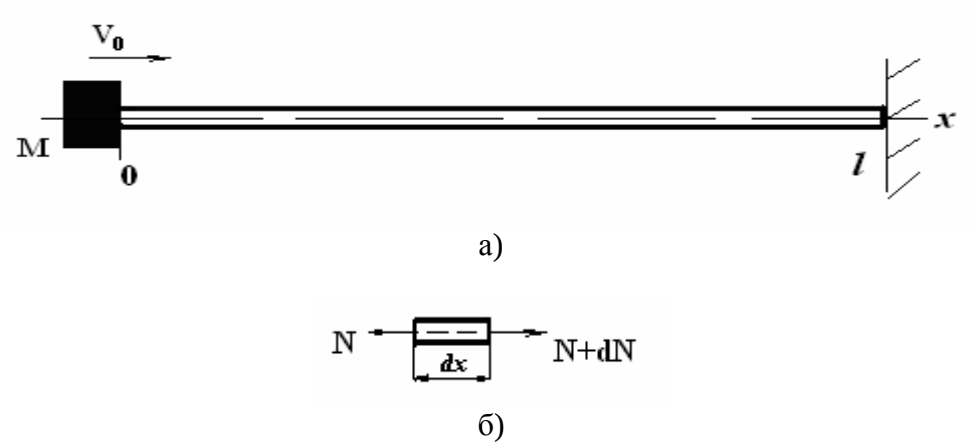


Рис. 2.1. Схема продольного удара сосредоточенной массы по стержню

Выделим в стержне элементарный участок dx и изобразим его отдельно (рис. 2.1, б), заменив действие отброшенных частей стержня неизвестными реакциями связей – продольными силами N и $N + dN$. Учитываем, что $dN = \frac{\partial N}{\partial x} dx$.

По принципу Даламбера сумма проекций сил, действующих на элементарный участок, с учетом сил инерции на продольную ось равна нулю

$$\sum X_{\text{i}} = 0, \; -N + q_x\, dx + N + \frac{\partial N}{\partial x} dx = 0, \quad q_x\, dx + \frac{\partial N}{\partial x} dx = 0, \tag{2.1}$$

где q_x – проекция интенсивности распределенных сил инерции на ось x, $q_x\, dx$ – проекция силы инерции элементарного участка на ось x.

Проекция силы инерции элементарного участка на ось x равна

$$q_x\, dx = -dm \cdot a_x, \qquad dm = \rho A dx, \tag{2.2}$$

где dm – масса элементарного участка, ρ – плотность материала, A – площадь поперечного сечения стержня, a_x – проекция на ось x ускорения центра масс элементарного участка.

Учитывая (2.2) в (2.1), имеем

$$-\rho A a_x dx + \frac{\partial N}{\partial x} dx = 0\ ,\ \frac{\partial N}{\partial x} - \rho A a_x = 0. \qquad (2.3)$$

Продольная сила в поперечном сечении стержня

$$N = EA\frac{\partial u}{\partial x},$$

где E – модуль упругости 1-го рода материала стержня, $\frac{\partial u}{\partial x}$ – относительная продольная деформация в сечении x, $u = u(x,t)$ – продольное перемещение поперечного сечения, t – время.

Тогда, учитывая, что

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(EA\frac{\partial u}{\partial x}), \qquad a_x = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

получим из (2.3)

$$\frac{\partial}{\partial x}(EA\frac{\partial u}{\partial x}) - \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \qquad (2.4)$$

Дифференциальное уравнение (2.4) должно быть дополнено соответствущими для каждой задаче начальными и граничными условиями.

Для однородного стержня (E = const, A = const) уравнение (2.4) преобразуется к виду

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 \le x \le l$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 \le x \le l \qquad (2.5)$$

где $a = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения упругой волны в материале стержня (для стали $a \approx 5000$ м/с).

Начальные условия при $t = 0$:

$$u(x,0) = 0,$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \begin{cases} V_0, & x = 0, \\ 0, & 0 < x \le l \end{cases}.$$

Граничные условия: если $x = 0$, $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} < 0$,

$$M\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} = EA\frac{\partial u(0,t)}{\partial x},$$

$$V_M = \frac{\partial u(0,t)}{\partial t}, \qquad x_M = u(0,t) \quad ,$$

если $x_м \le u(0,t)$

$$\frac{\partial u(o,t)}{\partial x} = 0, \quad v_м = const, \quad x_м = x_м(t_*) + v_м(t - t_*) \quad ,$$

при $x = l$ $\quad u(l,t) = 0, \quad \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial t} = 0,$

где E – модуль упругости 1-го рода материала стержня, A – площадь поперечного сечения; $x_м$ – координата, определяющая положение ударной массы M; $v_м$ – скорость ударной массы; t_* – время, когда произойдет отрыв ударной массы М от ударного сечения.

2.2. Волновая модель продольного удара по стержню с разнородными участками

Если стержень представлен множеством (рис. 2.2, а) разнородных участков, то дифференциальные уравнения вида (2.5) составляются для каждого участка.

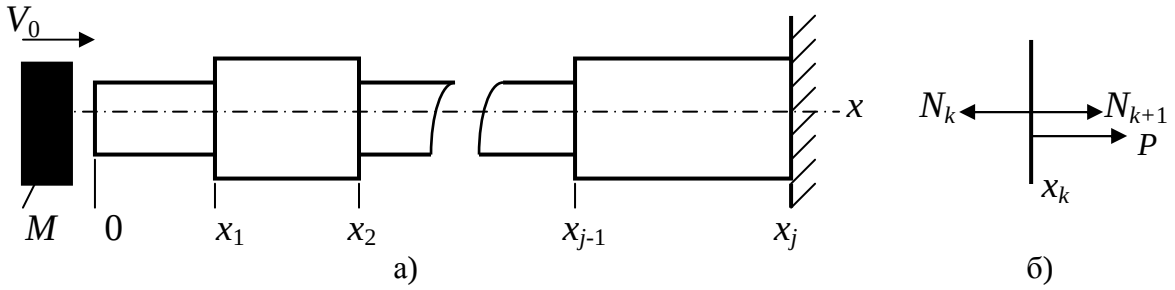


Рис.2.2. Схема продольного удара сосредоточенной массы по стержню с разнородными участками

Для схемы, представленной на рис. 2.2, а, система дифференциальных уравнений примет вид

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 \le x \le x_1,$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{1}{a_2^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 \le x \le x_2, \qquad (2.6)$$

. . . . . .

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} - \frac{1}{a_j^2}\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 \le x \le x_j,$$

где u_1, u_2, . . . , u_j – продольные перемещения поперечных сечений стержня соответственно на 1-м, 2-м, . . . , j-м участках; a_1, a_2, . . . , a_j – скорости распространения упругих волн на соответствующих участках, x_1, x_2,…., x_j – координаты границ участков.

Дифференциальные уравнения (2.6) также должны быть дополнены соответствующими начальными и граничными условиями, определяемыми постановкой задачи. К граничным условиям относятся условия сопряжения участков

$$u_1(x_1,t) = u_2(x_1,t)\ ,\ \ u_2(x_2,t) = u_3(x_2,t)\ ,\ .\ .\ .\ ,\ u_{j-1}(x_{j-1},t) = u_j(x_{j-1},t),$$

а также условия статического равновесия сил в сопряженном сечении (рис. 2.2, б)

$$-N_k + P_x + N_{k+1} = 0,$$

где x_1, x_2, . . . , x_{j-1} – координаты, определяющие положение сопряженных сечений; N_k – продольная сила в сечении $x_к$, принадлежащему участку ($к$); N_{k+1} – продольная сила в сечении $x_к$, принадлежащему участку ($к$ +1); P_x – проекция на продольную ось сосредоточенной силы P, приложенной в сечении $x_к$.

2.3. Волновая модель продольного удара, построенная на основе использования теоремы об изменении количества движения механической системы

2.3.1. *Волновая модель продольного удара ступенчатых стержней*

Данная модель разработана Александровым Е. В. и Соколинским В. Б. и опубликована в монографии [9]. При построении модели продольного удара авторы используют лишь основные законы динамики и исходное положение волновой теории удара, утверждающей конечность и определенность скорости распространения напряжений и деформаций в теле. Изложим их подход, а предложенную ими модель продольного удара назовем моделью Е. В. Александрова – В. Б. Соколинского.

Допущениям плоской теории продольного удара в наибольшей степени отвечает совершенно соосное соударение стержней одинакового или близкого сечения, имеющих идеально плоские торцы, абсолютно перпендикулярные осям стержней. В этом случае (рис. 2.3) удар произойдет одновременно по всей плоскости торца. Следовательно, все точки, лежащие на поверхности контакта, с самого начала окажутся в одинаковых или почти одинаковых условиях. Вследствие этого они получают одинаковые перемещения, скорости, напряжения и, таким образом, полностью удовлетворяют основным допущениям плоского продольного удара.

На рис. 2.3, а изображено положение стержней до удара; на рис. 2.3, б – эти же стержни во время удара.

Приняты следующие условные обозначения: A_1 и A_2 – площади поперечных сечений стержней; ρ_1 и ρ_2 – плотности материалов, из которых изготовле-

ны стержни; N_1 и N_2 – начальные силы, сжимающие стержни до удара; V_{01} и V_{02} – начальные скорости стержней (они могут быть направлены и навстречу друг другу); a_1 и a_2 – скорости распространения продольной волны по стержням; V – мгновенная скорость контактной площадки; N – сила ударного взаимодействия между стержнями или сила удара.

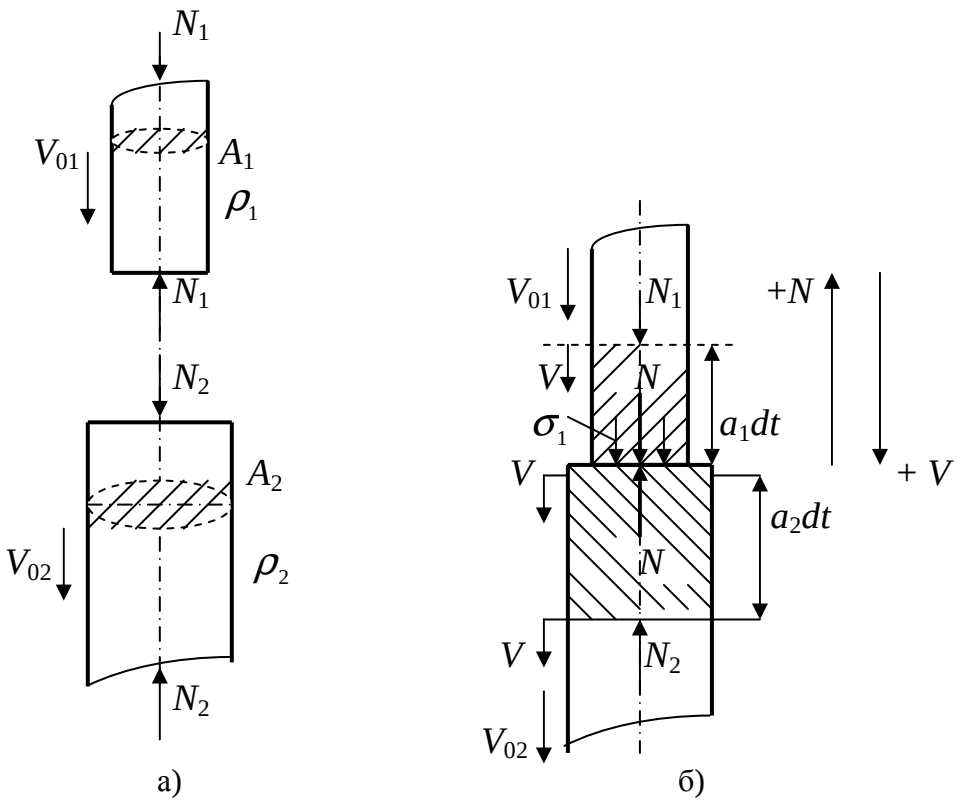


Рис. 2.3. Плоский удар полуограниченных стержней

На рис. 2.3 указаны также принятые положительные направления сил и скоростей.

Причиной возникновения сил на поверхности контакта соударяющихся тел является их инерция, противодействующая любому изменению скорости тел: как ускорению, так и замедлению. Но, вступив в непосредственный контакт, имея общую контактную площадку, стержни не могут сохранять прежние скорости и потому в результате удара контактная площадка получает некоторую среднюю скорость V, которая меньше V_{01}, но больше V_{02}.

Возникновение силы удара на контакте стержней приводит к одновременному появлению напряжений на торцах стержней.

Согласно основному положению волновой теории удара эти напряжения распространяются от поверхности контакта по стержням со скоростью звука. Распространение представляется в виде последовательного соударения соседних сечений стержней, идентичных предшествующему соударению торцевых поверхностей. А поскольку ни сечение, ни свойства материала по длине стержня не меняются, в результате соударения в сечениях появляются те же силы и скорости, что и на торцах.

Через время dt волна скорости V, распространяющаяся по стержням со скоростями a_1 и a_2, охватит объемы: в первом стержне A_1a_1dt и во втором A_2a_2dt, что соответствует массам $m_1 = \rho_1A_1a_1dt$ и $m_2 = \rho_2A_2a_2dt$.

В результате изменения скоростей с V_{01} до V в первом стержне и с V_{02} до V во втором стержне количество движения этих масс изменится в первом стержне на величину

$$m_1(V_{01} - V) = \rho_1A_1a_1dt(V_{01} - V),$$

а во втором стержне

$$m_2(V_{02} - V) = \rho_2A_2a_2dt(V_{02} - V).$$

Это изменение количества движения произойдет под действием сил $N - N_1$ для первого стержня и $-N + N_2$ для второго (знаки сил определяются принятым положительным направлением), которые действовали в течение времени dt.

Приравнивая изменение количества движения импульсу сил, найдем для первого стержня

$$(N - N_1)\, dt = \rho_1A_1a_1dt(V_{01} - V),$$

или, сокращая на dt,

$$N - N_1 = \rho_1A_1a_1\,(V_{01} - V).$$

Для второго стержня

$$(-N + N_2)dt = \rho_2A_2a_2dt(V_{02} - V),$$

или

$$-N + N_2 = \rho_2A_2a_2\,(V_{02} - V).$$

Входящие в данные выражения произведения плотности тела на скорость продольной волны (ρa) называют акустической жесткостью материала, или его импедансом, или его волновым сопротивлением.

Произведение акустической жесткости на площадь поперечного сечения тела ($\rho_1A_1a_1 = C_1$, $\rho_2A_2a_2 = C_2$), входящее в выражения волновой теории удара, называют ударной жесткостью тела. Тогда приведенные выше выражения примут вид

$$N - N_1 = C_1(V_{01} - V), \qquad C_1 = \rho_1A_1a_1,$$

$$N - N_2 = -\,C_2(V_{02} - V), \qquad C_2 = \rho_2A_2a_2.$$

Полученные в выражениях $N - N_1$ и $N - N_2$ есть разность между конечными и начальными силами удара, а $V_{01} - V$ и $V_{02} - V$ – разность между начальными и конечными скоростями сечений.

Из этих выражений видно, что приращение силы удара пропорционально ударной жесткости тела и потере начальной скорости.

Расчетные зависимости, связывающие скорость и силу при ударе в любом сечении стержня, являются основными в волновой теории плоского удара. Что касается знака перед ударной жесткостью тела, то он может быть определен с помощью правила, предложенного авторами [9]: *если расположить элементы ударной системы по направлению большей скорости сверху вниз, то ударная жесткость тел, лежащих выше рассматриваемой контактной плоскости должна в уравнениях иметь знак плюс, а лежащих ниже – минус.*

2.3.2. *Волновая модель продольного удара стержней с переменной продольной жесткостью поперечных сечений, построенная на основе использования теоремы об изменении количества движения механической системы*

Данная модель разработана Слистиным А. П. и Саруевым Л. А. для расчета продольного удара стержня с переменной продольной жесткостью поперечных сечений и опубликована в работе [187]. Рассмотрим модель А. П. Слистина - Л. А. Саруева. Схема ударной системы изображена на рис. 2.4.

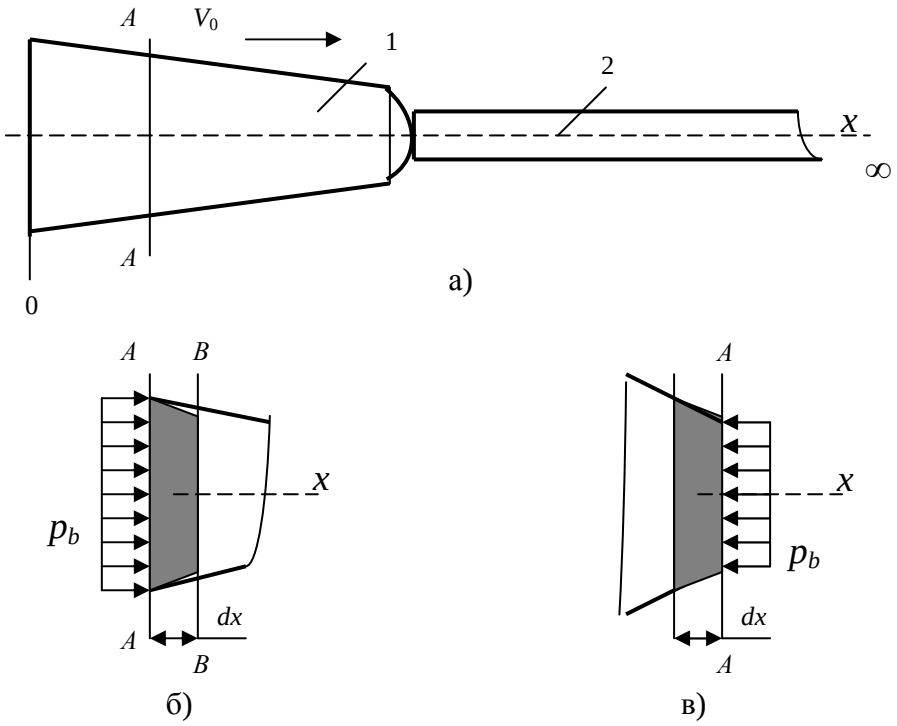


Рис. 2.4. Схема модели продольного удара Слистина А. П. и Саруева Л. А. [187]

Введена система координат Ox, начало оси выбрано на свободном (левом) торце бойка, ось направлена к ударному инструменту (рис. 2.4, а). Известны длина бойка l_b и площадь его поперечного сечения $A_b = A_b(x)$. Задана скорость бойка V_0 в момент соударения, принимаемый далее за $t = 0$.

Предполагается, что закон распространения продольных волн, как в стержне 1, так и в стержне 2, носит линейный характер. Рассмотрен фронт волны сжатия, распространяющейся по стержню 1. Стержень 1 разбит сече-

ниями на участки бесконечно малой длины dx (пластины). Рассматривается формирование волны в стержне 1 как следствие взаимодействия этих участков. Пусть фронт волны достиг некоторого сечения с координатой x. Это сечение обозначается через А–А (рис. 2.4, а).

Слева от сечения А–А движется участок бойка, длиной dx, имеющий скорость V_0, направленную вправо, и являющийся ненагруженным (внутренняя сила равна нулю). Участок бойка, расположенный справа от сечения А–А, имеет в общем случае другие значения скорости и силы. Происходит взаимодействие участков, расположенных слева и справа от сечения А–А (соударение). Внутренняя сила этого взаимодействия обозначается через P_b. Определяются параметры эффектов, возникающих вследствие воздействия силы P_b в течение бесконечно малого промежутка времени dt.

За время dt волна, расположенная правее сечения А–А, сместится вправо на расстояние $dx = adt$, и ее задний фронт займет положение В–В (рис. 2.4, б). Действие силы $P_b \neq 0$ формирует волну сжатия.

Аналогично, рассматривается участок, расположенный левее сечения А–А (рис. 2.4, в). Предполагается (закон равенства действия и противодействия), что волна сжатия сформируется и в нем и распространится на тоже расстояние $dx = adt$.

Таким образом, участок стержня 1 длиной dx, имеющий скорость V_0, инициирует волну как слева, так и справа от сечения А–А суммарной длиной $2dx$. То есть каждый участок длиной dx присоединяет к ранее сформированной волне новый участок длиной $2dx$ и эта более длинная волна распространяется в положительном направлении оси Ox. Так как данный эффект справедлив для каждого участка, то общая длина волны будет равна $2l_b$.

Параметры волны на участке, расположенном слева от сечения А–А, обозначаются индексом 1, а на расположенном справа от сечения А–А – индексом 2. Для определения скоростей V_{b1}, V_{b2} элементарных пластин после соударения авторами [187] используется теорема о сохранении количества движения:

$$\rho A_{b1} dx V_0 = \rho A_{b1} dx V_{b1} + \rho A_{b2} dx V_{b2}.$$

Пусть $A_b(x-0) = A_{b1}$, $A_b(x+0) = A_{b2}$ – соответствующие предельные значения площади $A_b(x)$. Тогда [187]

$$A_b(x-0) \cdot V_0 = A_b(x-0) \cdot V_{b1} + A_b(x+0) \cdot V_{b2}.$$

Требование неразрывности материала бойка вдоль оси x приводит к соотношению $V_{b1} = V_{b2}$ (абсолютно неупругий удар). Из последнего равенства следует

$$V_{b1} = V_{b2} = \frac{A_b(x-0)}{A_b(x-0) + A_b(x+0)} \cdot V_0.$$

При непрерывной функции $A_b(x)$ выполняется равенство

$$A_b(x-0) = A_b(x+0).$$

Тогда

$$V_b = V_{b1} = V_{b2} = V_0 / 2.$$

Данное равенство следует из предыдущего при непрерывной функции $A_b(x)$. Если это условие не выполняется, то функция $V_b(x)$ будет разрывной в соответствующих сечениях. При этом предельные значения в точках разрыва, как справа, так и слева будут иметь значения $V_0 / 2$. Такая функция отличается от непрерывной на так называемую [187] нулевую функцию $n(x)$, то есть на функцию, обладающую свойством

$$\int_0^x n(x)dx \equiv 0 \text{ при всех } x \geq 0.$$

Такие функции рассматриваются [187] как совпадающие. Поэтому, доопределяя в точках разрыва функцию $V_b(x)$ значением $V_0 / 2$, авторы [187] получают непрерывную функцию. В дальнейшем предполагается, что эта операция проделана и функция $V_b(x)$ является непрерывной.

Для определения внутренней силы P_b авторами [187] используется теорема об изменении кинетической энергии механической системы. Энергия на начало взаимодействия участков равна кинетической энергии левого участка

$$U_k = \frac{\rho A_b(x) dx V_0^{\,2}}{2}.$$

Энергия в конце взаимодействия будет складываться из кинетической энергии частиц материала, захваченных волной сжатия длиной $2dx$, и потенциальной энергии сжатых участков по обе стороны сечения А–А

$$U = \frac{\rho \cdot A_b(x) 2dx V_b^{\,2}}{2} + \frac{P_b^2 \cdot 2dx}{2EA_b(x)}.$$

На основе закона о сохранении энергии

$$\frac{\rho \cdot A_b(x) V_0^{\,2}}{2} = \frac{\rho \cdot A_b(x) V_0^{\,2}}{4} + \frac{P_b^{\,2}}{EA_b(x)}.$$

При выводе данного равенства [187] учтено соотношение $V_b = V_0 / 2$.
В результате

$$P_b = -\frac{\sqrt{\rho E} \cdot A_b(x) \cdot V_0}{2}.$$

Знак минус в формуле учитывает, что удар бойком формирует волну сжатия.

Абсолютно неупругий удар подразумевает поглощение энергии в зоне контакта. Это явление действительно происходит, но поглощенная энергия в данном случае уходит на формирование волн.

Как уже было отмечено, удар бойком длиной l_b инициирует в стержне 1 волну длиной $2l_b$. Кажущееся несоответствие объясняется авторами [187] таким образом. За время инициирования волны $T_y = 2l_b/a$ половина волны уже уйдет в стержень 1 (или отразится от него), а оставшаяся половина полностью займет стержень 1.

С целью упрощения расчетов данный процесс моделируется следующим образом. Стержень 1 условно «растягивается» до длины $2l_b$, координата $x=l_b$ контакта стержень 1-стержень 2 сохраняется постоянной. Вводится переменная $x_c = 2x - l_b$ и записываются следующие равенства:

$$V_b(x_c) = V_0/2, \qquad P_b(x_c) = -\frac{E \cdot A_b(x_c) \cdot V_0}{2 \cdot a},$$

где $-l_b \le x_c \le l_b$ и учтено, что $a = \sqrt{E/\rho}$.

Найденные значения P_b, V_b связаны соотношением

$$P_b(x_c) = -\frac{E \cdot A_b(x_c)}{a} \cdot V_b(x_c),$$

которое всегда выполняется для значений силы и скорости в волне.

Сформированная волна с параметрами

$$V_b(x_c) = V_0/2, \qquad P_b(x_c) = -\frac{E \cdot A_b(x_c) \cdot V_0}{2 \cdot a},$$

начинает распространяться в прямом направлении (к ударному сечению стержня 2). Можно определить параметры волны, падающей на ударный торец стержня 1 («волна на торце»). Площадь поперечного сечения стержня 1 на ударном торце обозначается через A_{bc}. Вследствие малой длины бойка не учитываются потери энергии за счет внутреннего трения при пробеге волны до ударного сечения.

Для нахождения параметров волны, проходящей через сечение площадью A_{bc}, авторы [187] воспользовались равенством потоков мощности, создаваемыми сформированной волной и «волной на торце». С целью упрощения определены параметры сформированной волны при ее «старте», предполагая, что в дальнейшем она движется по участку площадью A_{bc} без искажения.

Поток мощности, создаваемый сформированной в стержне 1 волной, равен

$$N_b = -P_b \cdot V_b = \frac{E \cdot A_b(x_c)}{4a} \cdot V_0^{\,2}.$$

Параметры «волны на торце» обозначаются через P_b, V_b . Эти параметры связаны соотношением $P_b(x_c) = -\dfrac{E \cdot A_b(x_c)}{a} \cdot V_b(x_c)$. Тогда $V_c = -\dfrac{aP_c}{EA_{bc}}$.

Поток мощности в «волне на торце»

$$N_c = -P_c \cdot V_c = \frac{a \cdot P_c^{\,2}}{EA_{bc}}.$$

Равенство потоков мощности N_b и N_c приводит к соотношению

$$\frac{a \cdot P_c^{\,2}}{EA_{bc}} = \frac{E \cdot A_b(x_c)}{4a} \cdot V_0^{\,2},$$

откуда

$$P_c(x_c) = -\frac{E}{a}\sqrt{A_{bc} \cdot A_b(x_c)} \cdot \frac{V_0}{2}.$$

Скорости сечений в «волне на торце» найдутся по формуле

$$V_c(x_c) = \sqrt{\frac{A_b(x_c)}{A_{bc}}} \cdot \frac{V_0}{2}.$$

Значения $P_c(x_c)$, $V_c(x_c)$ являются начальными (стартовыми) значениями для волн. Так, например, значения скорости сечений в волне будут равны

$$V_c(x_c - at) = \sqrt{\frac{A_b(x_c - at)}{A_{bc}}} \cdot \frac{V_0}{2},$$

а значения силы равны

$$P_c(x_c - at) = -\frac{E}{a}\sqrt{A_{bc} \cdot A_b(x_c - at)} \cdot \frac{V_0}{2}.$$

Распределение смещений можно получить интегрированием зависимости

$$V_c(x_c, t) = \frac{\partial u_c(x_c, t)}{\partial t}.$$

Дальнейшее поведение волны, сформированной в бойке с параметрами

$$P_c(x_c - at) = -\frac{E}{a}\sqrt{A_{bc} \cdot A_b(x_c - at)} \cdot \frac{V_0}{2}, \quad V_c(x_c - at) = \sqrt{\frac{A_b(x_c - at)}{A_{bc}}} \cdot \frac{V_0}{2}$$

зависит от условий на контакте боек-хвостовик. Так, например, если площадь ударного торца хвостовика равна A_{bc} и соударяющиеся торцы плоские, то в ударном инструменте будет распространяться волна с теми же параметрами.

2.4. Волновая модель продольного удара с учетом распределенных сил инерции стержневой системы и контактных деформаций соударяемых тел (модель продольного удара Сирса)

В основе волновой модели продольного удара Сен-Венана лежит предположение об идеально плоских торцевых сечениях соударяемых стержней. Сирс [9, 51, 87, 93, 108, 148] рассмотрел продольный удар стержней со сферической формой торцевых сечений.

Развивая положения волновой теории удара, Сирс совместил подход Герца, учитывающий лишь местную контактную деформацию соударяемых тел, и подход Сен-Венана, учитывающий общую динамическую деформацию тел при ударе.

Модель удара Сирса может быть представлена схемой, изображенной на рис. 2.5, а. Стержень 1, имеющий перед соударением скорость V_1, наносит продольный удар по стержню 2, движущемуся со скоростью V_2 (причем $V_1 > V_2$).

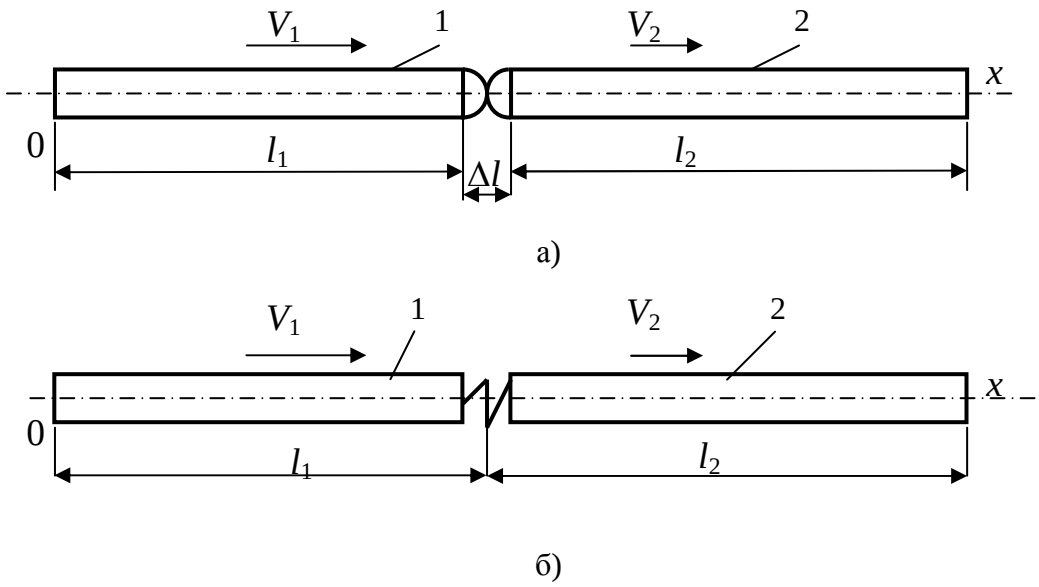


Рис. 2.5. Схема продольного удара стержней с учетом контактных деформаций в ударном сечении (модель продольного удара Сирса): а) схема продольного удара стержней со сферическими торцами; б) схема продольного удара стержней с упругим элементом

Ударные торцы стержней имеют сферическую поверхность. При их взаимодействии контактная сила может быть описана моделью Герца. Если рассматривать ударную систему с точки зрения распределения напряжений в поперечных сечениях, то в ней можно выделить участок Δl с существенно неравномерным распределением напряжений в поперечных сечениях и участки, где напряжения по поперечному сечению распределены практически равномерно (участок l_1 и участок l_2).

На участках l_1 и l_2 может быть использована модель Сен-Венана, а на участке Δl можно пренебречь инерционными свойствами этого участка и учитывать только его упругие свойства.

Сирс установил, что длина приконтактного участка с неравномерным распределением напряжений составляет

$$\Delta l = \frac{d_1}{2}\left[\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}(1+\mu_1)\cdot(3-2\mu_1)\right] + \frac{d_2}{2}\left[\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}(1+\mu_2)\cdot(3-2\mu_2)\right],$$

где d_1, d_2 − диаметры соударяемых стержней; μ_1, μ_2 − коэффициенты Пуассона материала стержней.

Длина Δl, как правило, незначительна по сравнению с l_1 и l_2. Пренебрегая длиной Δl, схему продольного удара стержней можно представить как соударение стержней через нелинейный упругий элемент (рис. 2.5, б), сосредоточенного в сечении $x = l_1$.

Движение поперечных сечений на участках $0 \le x \le l_1$ и $l_1 \le x \le l_1 + l_2$ описывается на основе (2.6) волновыми уравнениями вида

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1^{\,2}}\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 \le x \le l_1,$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_2^{\,2}}\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} = 0, \qquad l_1 \le x \le l_1 + l_2, \qquad (2.7)$$

где $u_1(x,t), u_2(x,t)$ – продольные перемещения поперечных сечений соответственно стержней 1 и 2 , x − координата сечения, t – время, a_1 и a_2 – скорости распространения волн в материале стержней.

Начальные условия характеризуют отсутствие деформаций в поперечных сечениях стержней перед ударом и начальные скорости поперечных сечений:

$$\frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial t} = V_1, \quad \frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial t} = V_2, \qquad (2.8)$$

где t_0 – начальное время.

Граничные условия для схемы, изображенной на рис. 2.3, имеют вид

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2(l_1+l_2,t)}{\partial x} = 0, \quad E_1A_1\frac{\partial u_1(l_1,t)}{\partial x} = E_2A_2\frac{\partial u_2(l_1,t)}{\partial x},$$

$$E_1A_1\frac{\partial u_1(l_1,t)}{\partial x} = -\kappa\alpha^{3/2}, \text{ при } \alpha > 0,\ \alpha = u_1(l_1,t) - u_2(l_1,t); \qquad (2.9)$$

$$E_1A_1\frac{\partial u_1(l_1,t)}{\partial x} = 0, \text{ при } \alpha \le 0,$$

где $k = \dfrac{4}{3(1-\mu_1^2)/E_1 + (1-\mu_2^2)/E_2)} \sqrt{\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$ – коэффициент, характеризующий геометрию контактных поверхностей стержней и свойства их материалов; α – сближение сечений, прилегающих к сферическим торцам за счет контактных деформаций.

На рис. 2.6 представлена качественная диаграмма нелинейной зависимости ударной силы P_k в контактном сечении (диаграмма 1) в зависимости от сближения α, когда ударная сила описывается по Герцу зависимостью $P_k = \kappa \alpha^{3/2}$.

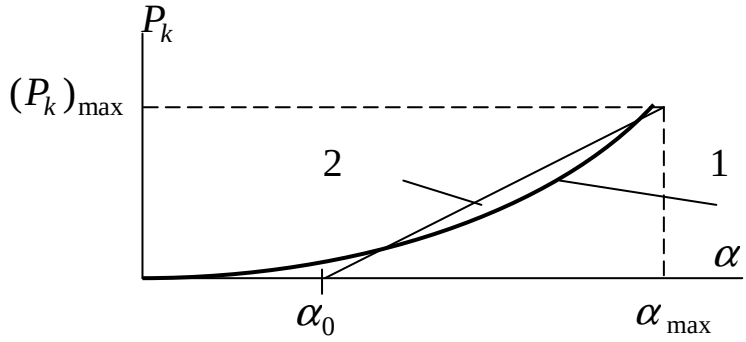


Рис. 2.6. Диаграммы, характеризующие изменение контактной силы $P_к$ от сближения: диаграмма 1 – модель Герца, диаграмма 2 – модель Бидермана В. Л. - Малюковой М. Н.

Модель Бидермана В. Л. - Малюковой М. Н. (диаграмма 2) линеаризует эту зависимость таким образом, чтобы обеспечивалось равенство работы контактной силы при сближении соударяемых тел, чтобы были равны максимальные сближения $\alpha_{\max}$ и максимальные значения контактной силы $(P_k)_{\max}$.

Работа контактной силы по модели Герца

$$\int_0^{\alpha_{\max}} P_k d\alpha = \int_0^{\alpha_{\max}} k\alpha^{3/2} \cdot d\alpha = \frac{2}{5} k\alpha_{\max}^{5/2}.$$

Работа контактной силы по модели Бидермана В. Л. - Малюковой М. Н. [45]

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_{\max}} P_k d\alpha = \frac{1}{2}(P_k)_{\max} \cdot (\alpha_{\max} - \alpha_0).$$

Так как $(P_k)_{\max} = k\alpha_{\max}^{3/2}$, то работа контактной силы по модели Бидермана - Малюковой равна

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_{\max}} P_k d\alpha = \frac{1}{2}(P_k)_{\max} \cdot (\alpha_{\max} - \alpha_0) = \frac{1}{2} \cdot k\alpha_{\max}^{3/2} \cdot (\alpha_{\max} - \alpha_0).$$

Из равенства работ

$$\frac{2}{5}k\alpha_{\max}^{5/2} = \frac{1}{2}\cdot k\alpha_{\max}^{3/2}\cdot(\alpha_{\max}-\alpha_0)$$

находим, что $\alpha_0 = \frac{1}{5}\alpha_{\max}$.

Жесткость линейного упругого элемента k^*, моделирующего контактное взаимодействие в модели Бидермана - Малюковой, определяется из равенства максимальных значений контактной силы $(P_k)_{\max}$:

$$k^*\cdot(\alpha_{\max}-\alpha_0) = k\alpha_{\max}^{3/2}, \quad k^*\cdot(\alpha_{\max}-\frac{1}{5}\alpha_{\max}) = k\alpha_{\max}^{3/2},$$

откуда $$k^* = \frac{5}{4}k\alpha_{\max}^{1/2}.$$

2.4.1. *Модель продольного удара сосредоточенной массы по стержню при нелинейной характеристике контактного взаимодействия с учетом пластических деформаций*

Модель продольного удара по стержню при нелинейной характеристике контактного взаимодействия с учетом пластических деформаций описана Б. Н. Стихановским [199] Г. С. Мигиренко, В. Н. Евграфовым, А. А. Рыковым и В. Ф. Хоном [151].

Как отмечают авторы [151] модель удара Герца хорошо описывает только упругое взаимодействие тел. Рядом авторов были предприняты попытки установления более общей зависимости «сила – деформация». Е. Майер предложил свою эмпирическую зависимость, связывающую силу с радиусом остаточного кратера r для случая квазистатического внедрения твердой сферы радиусом R в плоскую поверхность [151]:

$$P_k = cr^2(r/R)^{n-2},$$

где c и n – константы материалов.

Бергером это соотношение было распространено на процесс соударения. В случае достаточно малых вдавливаний (преимущественно пластического характера) и, предполагая среднее давление на поверхности соприкосновения постоянным, можно придти к соотношению [151]

$$P_k = 2\pi R_0\sigma_T\alpha.$$

Данное выражение описывает первую фазу удара. Связь между силой и деформацией во время второй фазы удара определяется формулой [151]

$$P_k = P_m\left(\frac{\alpha-\alpha_r}{\alpha_m-\alpha_r}\right)^q, \qquad \alpha_r \le \alpha \le \alpha_m,$$

где P_m и α_m, α_r – соответственно максимальные сила и деформация, остаточная деформация; величина показателя q равна 3/2, если восстановление происходит в соответствии с законом Герца.

Несмотря на слабую теоретическую обоснованность, модель удара Е. Майера имеет существенное преимущество, ибо с ее помощью определяется остаточное вдавливание, которое имеет место при соударениях со средними скоростями.

В работе Стихановского Б. Н. [199] предложена модель продольного удара стержней (модель Стихановского Б. Н.), базирующаяся на феноменологическом представлении о характере контактного взаимодействия соударяемых тел. Она дает достаточно хорошее соответствие между зависимостью контактной силы от деформации $P_k = P_k(\alpha)$ и экспериментальными фактами. В этой работе на основании анализа экспериментальных данных из работ [52] и [53] и известных выражений для контактной силы по Герцу и Майеру предложена также феноменологичская зависимость «сила – деформация» вида

$$P_k = K_c \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^{\frac{3}{2+b_P P_k}},$$

которая получается как бы с обратной связью. Деформация α_0 характерна тем, что при $\alpha = \alpha_0$, независимо от характера контактного взаимодействия (независимо от показателя степени), ударная сила равна «жесткости» контакта K_c. Это позволяет определить α_0 и коэффициент жесткости K_c как функции E_0, R_0, σ_T.

При $\alpha = \alpha_0$ рекомендуется подсчитывать K_c как по формуле Герца, считая с одной стороны деформацию чисто упругой, так и по формуле пластического взаимодействия, но с приведенным давлением текучести σ_0, считая уже деформацию упругопластической:

$$K_c = 2\pi R_0 \sigma_0 \alpha_0 = K_* \alpha_0^{3/2}.$$

В этом случае

$$\alpha_0 = R_0 \left(\frac{3\pi\sigma_0}{2E_0} \right)^2, \quad K_c = \frac{\pi}{2} \sigma_0 \left(3\pi R_0 \frac{\sigma_0}{E_0} \right).$$

Приведенное давление текучести σ_0 определяется приближенно по формуле

$$\sigma_0 = \sigma_T \frac{\alpha_n}{\alpha} = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + 0{,}5\alpha_y}.$$

Данная формула получается по аналогии с выражением для контактной

силы при пластическом ударе

$$P_{пл} = 2\pi R_0 \sigma_T \alpha_n = 2\pi R_0 \sigma_0 \alpha .$$

Для определения σ_0 можно использовать максимальные значения α_{nm} и α_{ym}:

$$\alpha_{nm} = \frac{P_{nm}}{2\pi R_0 \sigma_T} = V_0 \sqrt{\frac{m_0}{2\pi R_0 \sigma_T}} ,$$

$$\alpha_{ym} = \left(\frac{P_{ym}}{K_*} \right)^{2/3} = \left(\frac{15}{16} \cdot \frac{m_0 V_0}{E_0 \sqrt{R_0}} \right)^{2/5} , \qquad P_{nm} = V_0 \sqrt{2\pi R_0 \sigma_T m_0} ,$$

$$\sigma_0 = \sigma_T + \left(1 + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{81 \sigma_T^3 R_0^3}{8\pi m_0 V_0^2 E_0^4}} \right)^{-1} .$$

Давление текучести рекомендуется [199] определять по формуле

$$\sigma_T = \frac{3P_m}{\pi (r_r^2 + 2r_m^2)} \approx \frac{3P_m}{2\pi R_0 (\alpha_m + 2\alpha_r)} .$$

Процедура расчета предполагает сведения о значениях P_m, r_r или α_r, которые могут быть найдены экспериментально.

Приведенная масса m_0 определяется по формуле

$$m_0 = \frac{m_{01} \cdot m_{02}}{m_{01} + m_{02}} , \qquad m_{01} \approx m_{D1} \left(\frac{2T_1}{T_1 + T_{D1}} \right)^{2\left(1 - \frac{T_{D1}}{\tau_2}\right)} ,$$

при $T_2 \le t_f$ $$m_{02} \approx m_{D2} \left(\frac{2T_2}{T_2 + T_{D2}} \right)^{2\left(1 - \frac{T_{D2}}{\tau_2}\right)} ,$$

при $T_2 \ge t_f$ $$m_{02} \approx m_{D2} \left(\frac{2t_f}{t_f + T_{D2}} \right)^{2\left(1 - \frac{T_{D2}}{\tau_2}\right)} ,$$

где $T_i = \dfrac{2L_{0i}}{c_{0i}}$, T_{Di} – периоды собственных колебаний всего тела с приведенной длиной L_{0i} и его части с длиной $D_i = \sqrt{4A_i / \pi}$ и массой m_{Di}, τ_2 – время удара по Герцу между массами m_{D1} и m_{D2}, причем

$$\tau_2 = 2{,}94\left(\frac{m_{D0}}{E_0^2 R_0 V_0}\right)^{1/5}, \quad m_{D0} = \frac{m_{D1} m_{D2}}{m_{D1} + m_{D2}}.$$

Время удара приближенно равно:

при $C_2 / C_1 \geq 1$ $\qquad t_f = \tau_0 = 2T_1 + \dfrac{\tau_2}{1 + T_1 / \tau_2}$,

при $C_2 / C_1 < 1$ и $T_2 > \tau_1$ $\qquad t_f = \tau_1 = \tau_0\left(1 + \dfrac{(1 - C_2 / C_1) \cdot T_1}{(1 + C_2 / C_1) \cdot \tau_2}\right)$,

при $C_2 / C_1 < 1$ и $T_2 < \tau_1$ $\qquad t_f \approx T_2$.

2.5. Характерные волновые модели плоского продольного удара стержневых систем

2.5.1. *Волновая модель продольного удара стержня конечной длины о полуограниченный однородный стержень*

Волновая модель продольного удара стержня конечной длины о полуограниченный однородный стержень описана в работах [9, 12, 17]. Рассмотрим схему продольного удара стержня конечной длины о полуограниченный однородный стержень (рис. 2.7).

Стержень 1 движется со скоростью V_0 и наносит удар по неподвижному полуограниченному стержню 2 в момент времени $t = 0$.

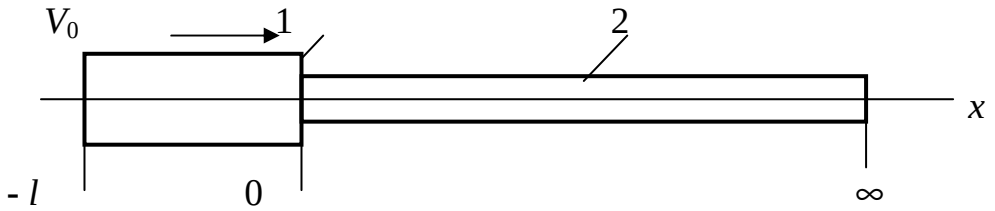


Рис. 2.7. Схема продольного удара стержня конечной длины о полуограниченный стержень

Движение поперечных сечений соударяемых стержней описывается волновыми уравнениями вида

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad -l \leq x \leq 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_2^2}\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \tag{2.10}$$

где $u_1(x,t), u_2(x,t)$ – продольные перемещения поперечных сечений соответственно стержней 1 и 2 , x − координата сечения, t – время, a_1 и a_2 – скорости распространения волн в материале стержней.

Начальные условия определяют состояние стержней перед их соударением: при $t = t_0 = 0$

$$\frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial t} = V_1, \quad \frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial x} = 0. \qquad (2.11)$$

Краевые условия определяют отсутствие сил на торцах стержней в сечениях $x = -l$ и $x = \infty$:

$$\frac{\partial u_1(-l_1,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_2(\infty,t)}{\partial x} = 0, \qquad (2.12)$$

а также определяют равенство сил и условия сопряжения в ударных сечениях (x = 0) стержней при непосредственном их взаимодействии

$$E_1 A_1 \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = E_2 A_2 \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x}, \quad \text{если} \ \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} \langle 0, \qquad (2.13)$$

где E_1, E_2 – модуль упругости 1-го рода материала стержней; A_1, A_2 – площадь поперечных сечений стержней 1 и 2,

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial t}, \quad \text{если} \ \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial t} \langle 0, \qquad (2.14)$$

либо отсутствие сил в ударных сечениях стержней, если их взаимодействие отсутствует:

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x} = 0. \qquad (2.15)$$

2.5.2. *Волновая модель продольного удара однородных стержней конечной длины*

Рассмотрим схему продольного удара стержней конечной длины (рис. 2.8). Стержень 1 движется со скоростью V_0 и наносит удар по неподвижному стержню 2 в момент времени t = 0.

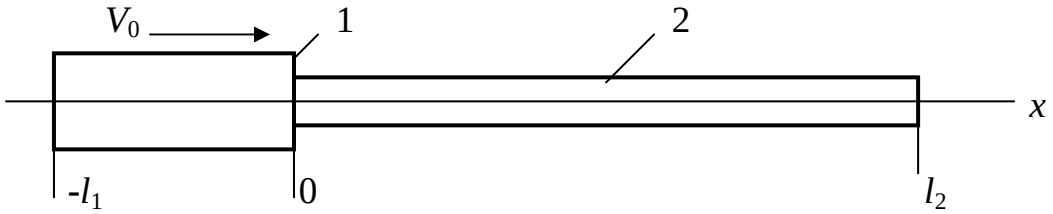


Рис. 2.8. Схема продольного удара стержней конечной длины

Движение поперечных сечений соударяемых стержней описывается волновыми уравнениями вида

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1^{\,2}} \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad -l_1 \le x \le 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_2^{\,2}} \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le x < l_2, \tag{2.16}$$

где $u_1(x,t), u_2(x,t)$ – продольное перемещение поперечного сечения соответственно стержней 1 и 2 , x − координата сечения, t – время, a_1 и a_2 – скорости распространения волн в материале стержней.

Начальные условия определяют состояние стержней перед их соударением: при $t = t_0 = 0$

$$\frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial t} = V_0, \quad \frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial x} = 0.$$

Краевые условия определяют отсутствие сил на торцах стержней в сечениях $x = -l_1$ и $x = l_2$:

$$\frac{\partial u_1(-l_1,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_2(l_2,t)}{\partial x} = 0,$$

а также определяют равенство сил и условия сопряжения в ударных сечениях (x = 0) стержней при непосредственном их взаимодействии

$$E_1 A_1 \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = E_2 A_2 \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x}, \quad \text{если } \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} \langle 0,$$

где E_1, E_2 – модуль упругости 1-го рода материала стержней; A_1, A_2 − площадь поперечных сечений стержней 1 и 2,

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial t}, \quad \text{если } \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial t} \langle 0,$$

либо отсутствие сил в ударных сечениях стержней, если их взаимодействие отсутствует:

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x} = 0.$$

2.5.3. *Волновая модель движения стержня при внезапно приложенном давлении на торце стержня*

Волновая модель движения стержня при внезапно приложенном давлении на торце стержня описана в работе [146]. Схема нагружения стержня конечной

длины представлена на рис. 2.9. В момент времени $t = t_0 = 0$ к неподвижному стержню длиной l в сечении $x = 0$ приложено давление p_0.

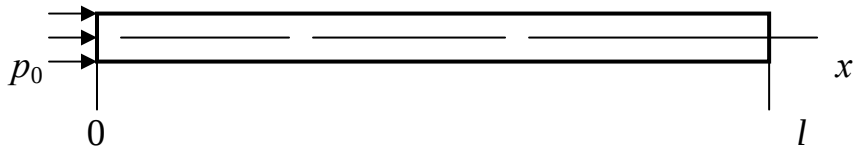


Рис. 2.9. Схема нагружения стержня давлением p_0

Движение поперечных сечений стержня описывается волновым уравнением вида

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le x \le l,$$

где $u(x,t)$ – продольное перемещение поперечного сечения стержня, x – координата сечения, t – время, a – скорость распространения волны в материале стержня.

Начальные условия определяют состояние стержня при $t = t_0 = 0$:

$$\frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u(x,t_0)}{\partial x} = 0, \qquad 0 < x \le l.$$

Краевые условия определяют возникновение давления p_0 в сечении $x = 0$ и отсутствие сил в сечении $x = l$:

$$E\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + p_0 = 0, \qquad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0.$$

2.5.4. *Волновая модель движения разнородных стержней при линейном упругом элементе между ними и внезапно приложенном давлении на торце стержня*

Схема нагружения стержней конечной длины представлена на рис. 2.10. В момент времени $t = t_0 = 0$ к неподвижному стержню 1 длиной l_1 в сечении $x = -l_1$ приложено давление p_0. Между стержнями 1 и 2 расположен линейный упругий элемент 3 длиной Δl.

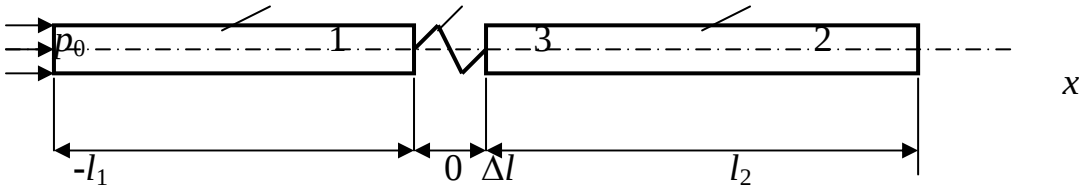


Рис. 2.10. Схема нагружения стержней давлением p_0

Движение поперечных сечений стержней 1 и 2 описывается волновыми уравнениями вида

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1^{\,2}} \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad -l_1 \le x \le 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_2^{\,2}} \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta l \le x < l_2,$$

где $u_1(x,t), u_2(x,t)$ – продольное перемещение поперечного сечения соответственно стержней 1 и 2 , x − координата сечения, t – время, a_1 и a_2 – скорости распространения волн в материале стержней.

Начальные условия определяют состояние стержней при $t = t_0 = 0$:

$$\frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial t} = V_0, \quad \frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad -l_1 < x \le 0,$$

$$\frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad \Delta l \le x < l_2.$$

Краевые условия определяют возникновение давления p_0 в сечении $x = -l_1$ и отсутствие сил в сечении $x = \Delta l + l_2$:

$$E_1 \frac{\partial u_1(-l_1,t)}{\partial x} + p_0 = 0, \qquad \frac{\partial u_2(\Delta l + l_2,t)}{\partial x} = 0,$$

а также условия взаимодействия через упругий элемент сечения $x = 0$ 1-го стержня и сечения $x = \Delta l$ 2-го стержня:

$$-E_1 A_1 \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} + E_2 A_2 \frac{\partial u_2(\Delta l,t)}{\partial x} = 0,$$

$$E_1 A_1 \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} + \kappa[u_1(0,t) - u_2(\Delta l,t)] = 0,$$

где κ − жесткость упругого элемента.

2.5.5. *Волновая модель движения стержня с разнородными участками при сосредоточенной массе между ними и внезапно приложенном давлении на торце стержня*

Схема нагружения стержней конечной длины представлена на рис. 2.11.

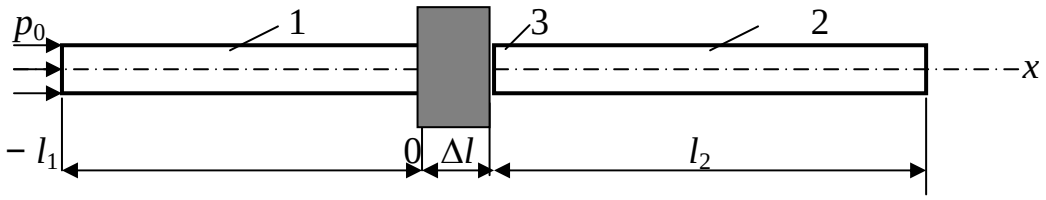


Рис. 2.11. Схема нагружения стержня с разнородными участками при сосредоточенной массе между ними

В момент времени $t = t_0 = 0$ к неподвижному стержню 1 длиной l_1 в сечении $x = -l_1$ приложено давление p_0. Между стержнями 1 и 2 расположено абсолютно твердое тело 3 длиной Δl.

Движение поперечных сечений стержней 1 и 2 описывается волновыми уравнениями вида

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1^{\,2}} \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad -l_1 \le x \le 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_2^{\,2}} \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta l \le x < l_2,$$

где $u_1(x,t), u_2(x,t)$ – продольное перемещение поперечного сечения соответственно стержней 1 и 2 , x − координата сечения, t – время, a_1 и a_2 – скорости распространения волн в материале стержней.

Начальные условия определяют состояние стержней при $t = t_0 = 0$:

$$\frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial t} = V_0, \quad \frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad -l_1 < x \le 0,$$

$$\frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad \Delta l \le x < l_2.$$

Краевые условия определяют возникновение давления p_0 в сечении $x = -l_1$ и отсутствие сил в сечении $x = \Delta l + l_2$:

$$E_1 \frac{\partial u_1(-l_1,t)}{\partial x} + p_0 = 0, \qquad \frac{\partial u_2(\Delta l + l_2,t)}{\partial x} = 0,$$

а также условия взаимодействия через абсолютно твердое тело сечения $x = 0$ 1-го стержня и сечения $x = \Delta l$ 2-го стержня:

$$-E_1 A_1 \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} + E_2 A_2 \frac{\partial u_2(\Delta l,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_2(\Delta l,t)}{\partial t},$$

$$M \frac{\partial^2 u_1(0,t)}{\partial t^2} = -E_1 A_1 \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} + E_2 A_2 \frac{\partial u_2(\Delta l,t)}{\partial x},$$

где M − масса абсолютно твердого тела.

2.5.6. *Волновая модель движения стержня с сосредоточенной массой и внезапно приложенном давлении на торце стержня*

Схема нагружения стержня конечной длины представлена на рис. 2.12. В момент времени $t = t_0 = 0$ к неподвижному стержню длиной l в сечении

$x = 0$ приложено давление p_0. Движение поперечных сечений стержня описывается волновым уравнением вида

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le x \le l,$$

где $u(x,t)$ – продольное перемещение поперечного сечения стержня, x – координата сечения, t – время, a – скорость распространения волны в материале стержня.

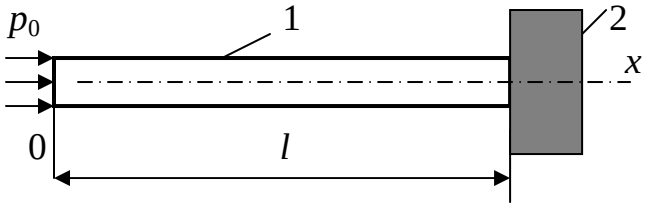


Рис. 2.12. Схема нагружения стержня с сосредоточенной массой давлением p_0

Начальные условия определяют состояние стержня при $t = t_0 = 0$:

$$\frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u(x,t_0)}{\partial x} = 0, \qquad 0 < x \le l.$$

Краевые условия определяют возникновение давления p_0 в сечении $x = 0$ и взаимодействие стержня с абсолютно твердым телом в сечении $x = l$:

$$E\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + p_0 = 0, \qquad M\frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial t^2} = -EA\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}.$$

2.5.7. *Волновая модель движения стержня с сосредоточенной массой и линейным упругим элементом при внезапно приложенном давлении на торце стержня*

Схема нагружения стержня конечной длины представлена на рис. 2.13.

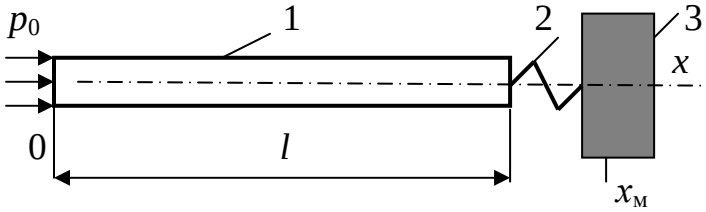


Рис. 2.13. Схема нагружения давлением p_0 стержня с сосредоточенной массой и линейным упругим элементом

В момент времени $t = t_0 = 0$ к неподвижному стержню длиной l в сечении $x = 0$ приложено давление p_0.

Движение поперечных сечений стержня описывается волновым уравнением вида

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le x \le l,$$

где $u(x,t)$ – продольное перемещение поперечного сечения стержня, x – координата сечения, t – время, a – скорость распространения волны в материале стержня.

Начальные условия определяют состояние стержня и абсолютно твердого тела при $t = t_0 = 0$:

$$\frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u(x,t_0)}{\partial x} = 0, \qquad 0 < x \le l, \quad x_м(t_0) = 0, \quad \dot{x}_м(t_0) = 0,$$

где $x_м(t_0)$, $\dot{x}_м(t_0)$ – координата и скорость абсолютно твердого тела при $t = t_0 = 0$.

Краевые условия определяют возникновение давления p_0 в сечении $x = 0$ и взаимодействие стержня 1 через линейный упругий элемент 2 в сечении $x = l$ с абсолютно твердым телом 3:

$$E\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + p_0 = 0, \quad M \cdot \ddot{x}_м = -EA\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}, \quad EA\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = k \cdot [x_м - u(l,t)],$$

где M – масса абсолютно твердого тела, $к$ – жесткость упругого элемента.

2.5.8. *Волновая модель движения поперечных сечений стержня с закрепленным торцом при внезапно снятой нагрузке*

Схема стержня представлена на рис. 2.14. Предполагается, что стержень был предварительно сжат силой P_0, приложенной в сечении $x = l$. Линия действия силы P_0 совпадала с продольной осью стержня. В момент времени $t = t_0 = 0$ сила P_0 исчезает.

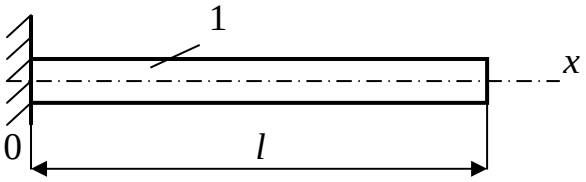


Рис. 2.14. Схема стержня с закрепленным торцем

Движение поперечных сечений стержня описывается волновым уравнением вида

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le x \le l,$$

где $u(x,t)$ – продольное перемещение поперечного сечения стержня, x – координата сечения, t – время, a – скорость распространения волны в материале стержня.

Начальные условия определяют состояние стержня при $t = t_0 = 0$:

$$\frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u(x,t_0)}{\partial x} = -\frac{P_0}{EA}, \qquad 0 \le x \le l.$$

Краевые условия определяют отсутствие перемещения поперечного сечения стержня в заделке и силы P_0 в сечении $x = l$:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0.$$

2.5.9. *Волновая модель движения поперечных сечений стержня с закрепленным торцом и с сосредоточенной массой на другом торце при внезапно снятой нагрузке*

Схема стержня представлена на рис. 2.15. Предполагается, что стержень был предварительно сжат силой P_0, приложенной в сечении $x = l$. Линия действия силы P_0 совпадала с продольной осью стержня. В момент времени $t = t_0 = 0$ сила P_0 исчезает.

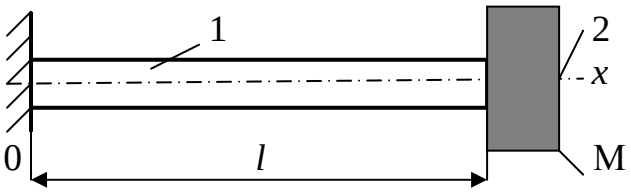


Рис. 2.15. Схема стержня с закрепленным торцем и с соредоточенной массой на другом торце

Движение поперечных сечений стержня описывается волновым уравнением вида

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le x \le l,$$

где $u(x,t)$ – продольное перемещение поперечного сечения стержня, x – координата сечения, t – время, a – скорость распространения волны в материале стержня.

Начальные условия определяют состояние стержня при $t = t_0 = 0$:

$$\frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u(x,t_0)}{\partial x} = -\frac{P_0}{EA}, \qquad 0 \le x \le l.$$

Краевые условия определяют отсутствие перемещения поперечного сечения стержня в заделке и взаимодействие сечения $x = l$ с абсолютно твердым телом массой M:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial t}=0, \quad M\frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial t^2}=-EA\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}.$$

2.5.10. *Волновая модель продольного удара сосредоточенной массы по полуограниченному стержню с упругой прокладкой в ударном сечении*

Продольный удар сосредоточенной массы по полуограниченному стержню с упругой прокладкой в ударном сечении описан в работах [48, 49, 118, 125]. Расчетная схема ударной системы изображена на рис. 2.16.

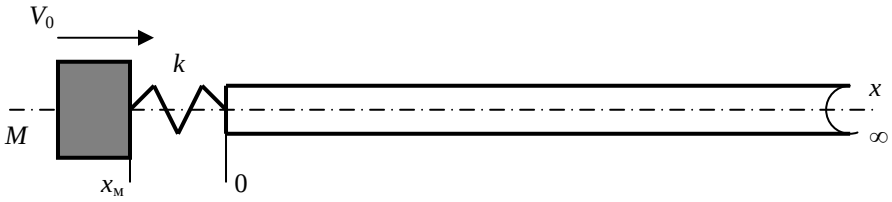


Рис. 2.16. Расчетная схема ударной системы

Ударная масса *M*, перемещающаяся вдоль оси *x* со скоростью V_0, наносит удар по неподвижному полуограниченному стержню с упругой прокладкой в ударном сечении $x=0$. Жесткость упругой прокладки равна «*k*», положение ударной массы определяется координатой $x_м$.

Движение поперечных сечений описывается волновым уравнением вида

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=0,$$

где $u(x,t)-$ продольное перемещение поперечного сечения стержня, положение которого определяется координатой *x*; *t* − время, *a* − скорость звука в материале стержня.

При $t = 0$ (начальные условия)

$$u(x,0)=0, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0, \qquad 0\le x\le\infty.$$

Граничные условия:

при $x = 0$ $\quad EA\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}-k\left[u(0,t)-x_м\right]=0,$ если $x_M>u(0,t)$,

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0, \quad \text{если} \quad x_M\le u(0,t),$$

при $x = \infty$ $\quad \dfrac{\partial u(\infty,t)}{\partial x}=0,$

где *E* − модуль упругости 1-го рода материала стержня; *A* − площадь поперечного сечения стержня.

Движение ударной массы описывается дифференциальным уравнением

$$M\,\ddot{x}_M = k\left[u(0,t) - x_M\right], \quad \text{если} \quad x_M > u(0,t)$$
$$\ddot{x}_M = 0\ , \quad \text{если} \quad x_M \le u(0,t)$$

при следующих начальных условиях:
при $t = 0 \quad x_M = 0 \quad , \ \dot{x}_M = V_0$.

2.5.11. *Волновая модель продольного удара сосредоточенной массы по полуограниченному неоднородному стержню с линейным упругим элементом в ударном сечении*

Волновая модель продольного удара сосредоточенной массы по полуограниченному неоднородному стержню с линейным упругим элементом в ударном сечении описана в работе [125]. Рассмотрим модель продольного удара сосредоточенной массы по полуограниченному неоднородному стержню с упругой прокладкой в ударном сечении. Расчетная схема ударной системы изображена на рис. 2.17.

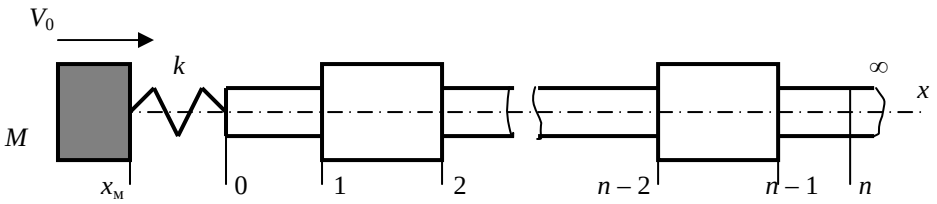


Рис. 2.17. Расчетная схема ударной системы

Ударная масса *M*, перемещающаяся вдоль оси *x* со скоростью V_0, наносит удар по неподвижному полуограниченному стержню с упругой прокладкой в ударном сечении $x = 0$. Жесткость упругой прокладки равна «*k*», положение ударной массы определяется координатой $x_м$.

Стержень представляет собой множество последовательно сопряженных разнородных участков. Полагаем, что число разнородных участков стержня конечно и равно *n*, а после n-го участка следует $n+1$-й полуограниченный однородный участок $(x_n \le x < \infty)$ с продольной жесткостью поперечных сечений, соответствующих продольной жесткости поперечных сечений участка n.

Движение поперечных сечений на произвольном j-том участке стержня описывается волновым уравнением вида

$$\frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_j^2}\frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad x_{j-1} \le x \le x_j\ ,$$

где $j = 1,2,...,n,n+1$; $u_j(x,t)$ – продольное перемещение поперечного сечения стержня; a_j – скорость звука в материале j -того участка стержня; x_{j-1} и x_j – координаты j-1-го и j -го поперечных сечений, определяющих границы j -го участка; x – координата поперечного сечения j - го участка, t – время.

Уравнение движения должно быть дополнено соответствующими начальными и граничными условиями. Для произвольного j-го участка стержня начальные условия (при $t = t_0$) имеют вид

$$u_j(x,t_0) = 0,\ \frac{\partial u_j(x,t_0)}{\partial t} = 0,\ 1 \le j \le n+1,\ x_{j-1} \le x \le x_j\ .$$

Граничные условия для ударного сечения:

$$\text{при } x = 0 \qquad E_1 A_1 \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} + k\left[x_м - u_1(0,t)\right] = 0,$$

где E_1 – модуль упругости 1-го рода материала 1-го участка стержня, прилегающего к ударному сечению; A_1– площадь поперечного сечения 1-го участка; $\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x}$ – продольная деформация в ударном сечении $(x = 0)$; $u_1(0,t)$ – продольное перемещение ударного сечения.

Граничные условия для сопряженных в сечении x_j j - го и j+1 -го участков имеют вид

$$-N_j(x_j,t) + N_{j+1}(x_j,t) = 0,\ j = 1,2,...,n,$$

$$v_j(x_j,t) = v_{j+1}(x_j,t) \quad j = 1,2,...,n,$$

где $N_j(x_j,t), N_{j+1}(x_j,t)$– продольные силы в поперечном сечении x_j, принадлежащем j - му и j + 1 -му участкам, $v_j(x_j,t)$ и $v_{j+1}(x_j,t)$– скорость поперечного сечения x_j.

Граничное условие для бесконечно удаленного сечения $x = \infty$, принадлежащего $n+1$ -му участку,

$$\frac{\partial u_{n+1}(\infty,t)}{\partial x} = 0.$$

Движение ударной массы M описывается дифференциальным уравнением

$$M\ddot{x}_м = -k\left[x_м - u(0,t)\right]$$

при следующих начальных условиях:

$$\text{при } t = 0 \quad x_м = 0, \qquad \dot{x}_м = V_0.$$

2.5.12. *Модель продольного удара стержня конечной длины о полуограниченный стержень с линейным упругим элементом в ударном сечении*

Модель продольного удара стержня конечной длины о полуограниченный стержень с линейным упругим элементом в ударном сечении рассмотрена в работах [138, 148]. Схема ударной системы изображена на рис. 2.18.

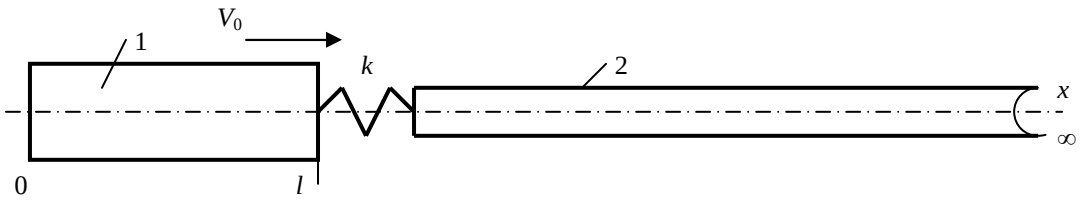


Рис. 2.18. Схема ударной системы

Удар по стержню 2 наносит стержень 1, который движется вдоль оси x со скоростью V_0. Сечения стержня 2 до удара не имеют начальных перемещений и скоростей. Движение поперечных сечений 1-го и 2-го стержней описывается дифференциальными уравнениями:

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1^2} \cdot \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 \le x \le l,$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_2^2} \cdot \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 \le x < \infty,$$

где $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ – перемещение поперечного сечения соответственно стержней 1 и 2, a_1, a_2 – скорость звука в материале стержней 1 и 2, t – время, x – координата поперечного сечения.

Начальные условия для рассматриваемой задачи

$$u_1(x,0) = 0, \quad u_2(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u_1(x,0)}{\partial t} = V_0, \quad \frac{\partial u_2(x,0)}{\partial t} = 0.$$

Граничные условия для сечений $x = 0$ и $x = \infty$ имеют вид

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_2(\infty,t)}{\partial x} = 0,$$

а для ударных сечений ($x = l$) стержней 1 и 2

$$-E_1 A_1 \frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x} + E_2 A_2 \frac{\partial u_2(l,t)}{\partial x} = 0,$$

$$E_1 A_1 \frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x} + k[u_1(l,t) - u_2(l,t)] = 0,$$

где E_1, E_2 – модуль упругости 1-го рода материала стержней 1 и 2; A_1, A_2 – площадь поперечных сечений стержней 1 и 2, l – длина стержня 1, $x = l$ – координата ударного сечения.

2.5.13. *Модель удара стержня конечной длины по неоднородному стержню с упругой прокладкой в ударном сечении*

Модель удара стержня конечной длины по неоднородному стержню с упругой прокладкой в ударном сечении описана в работе [135]. В данной работе рассматривается модель продольного удара неоднородного стержня конечной длины о полуограниченный стержень с упругой прокладкой в ударном сечении. Схема ударной системы представлена на рис. 2.19.

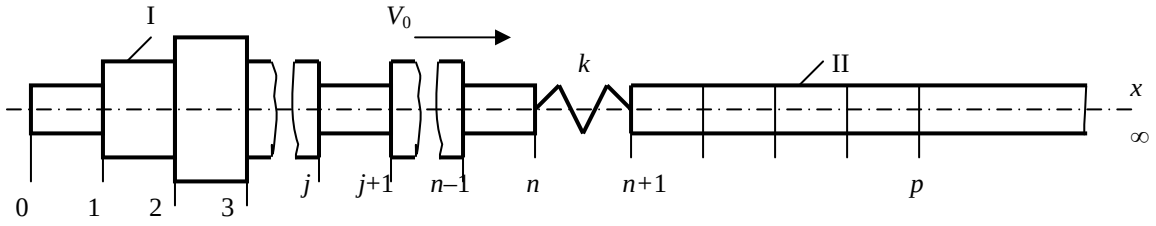


Рис. 2.19. Схема ударной системы

Удар по стержню II наносит стержень I, который движется перед ударом со скоростью V_0. Стержень II перед ударом находится в состоянии покоя. Стержень I представляет собой множество последовательно сопряженных разнородных участков. Полагаем, что число этих участков конечно и равно «n».

Стержень II также представлен множеством последовательно сопряженных разнородных участков. Число разнородных участков конечно от $n+1$ до p. Полагаем, что после участка «p» следует $p+1$-й полуограниченный однородный участок ($x_p \le x < \infty$) с продольной жесткостью поперечных сечений, соответствующих продольной жесткости поперечных сечений участка «p».

Движение поперечных сечений на произвольном j-м участке стержня I или II описывается волновым уравнением вида

$$\frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_j^2} \cdot \frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad x_{j-1} \le x \le x_j, \quad j = 1,2,...,p,p+1,$$

где $u_j(x,t)$ – продольное перемещение поперечного сечения стержня, a_j – скорость распространения волны деформации в материале j-го участка,

x_{j-1} и x_j – координаты $j-1$-го и j-го поперечных сечений, определяющих границы j-го участка; x – координата поперечного сечения j-го участка; t – время.

Уравнения движения должны быть дополнены соответствующими начальными и граничными условиями. Для участков стержня I ($1 \le j \le n$) начальные условия (при $t = t_0$) имеют вид

$$u_j(x,t_0) = 0, \quad \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial t} = V_0, \quad 1 \le j \le n, \quad x_{j-1} \le x \le x_j.$$

Для участков стержня II ($n+1 \le j \le p+1$) начальные условия (при $t = t_0$) имеют вид

$$u_j(x,t_0) = 0, \quad \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial t} = 0, \quad n+1 \le j < p, \quad x_{j-1} \le x \le \infty.$$

Граничные условия для сопряженных участков стержней имеют вид

$$-N_j(x_j,t) + N_{j+1}(x_j,t) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n-1,n+1,\ldots,p,$$

$$-N_n(x_n,t) + k \cdot \left[u_n(x_n,t) - u_{n+1}(x_n,t)\right] = 0,$$

$$V_j(x_j,t) = V_{j+1}(x_j,t), \quad j = 1,2,\ldots,n-1,n+2,\ldots,p, \quad \frac{\partial u_1(x_0,t)}{\partial x} = 0,$$

где $N_j(x_j,t)$, $N_{j+1}(x_j,t)$ – продольные силы в поперечном сечении x_j, принадлежащем j – му и $j+1$ – му участкам; k – жесткость упругой прокладки в ударном сечении; $V_j(x_j,t)$, $V_{j+1}(x_j,t)$ – скорость поперечного сечения x_j j-го и j+1-го участков; $\frac{\partial u_1(x_0,t)}{\partial x}$ – продольная деформация в сечении x_0 первого участка; $u_n(x_n,t)$, $u_{n+1}(x_n,t)$ – продольные перемещения ударных сечений n-го участка первого стержня и $n+1$-го участка второго стержня.

2.5.14. *Волновая модель неторцевого продольного удара*

Волновая модель неторцевого продольного удара через абсолютно жесткое тело стержней конечной длины

Волновые модели неторцевого продольного удара описаны в работах [9, 18, 20, 22]. На рис. 2.20 представлена схема продольного удара стержней конечной длины, когда удар стержня 1 по стержню 2 наносится в сечении $x = 0$ через абсолютно твердое тело 3. Массой тела 3 в рассматриваемом случае пренебрегаем.

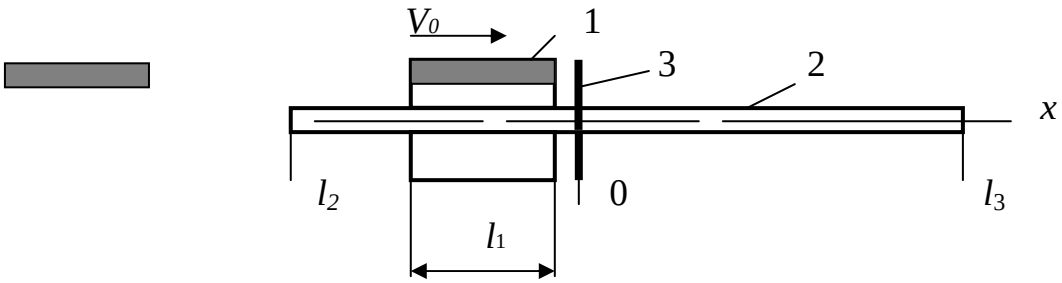


Рис. 2.20. Схема неторцевого продольного удара стержней

Движение поперечных сечений стержней 1 и 2 описывается волновыми уравнениями вида

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1^{\,2}}\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad -l_1 \le x \le 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_2^{\,2}}\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad -l_2 \le x \le 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_3^{\,2}}\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le x \le l_3,$$

где $u_1(x,t)$ − продольное перемещение поперечного сечения стержня 1; $u_2(x,t), u_3(x,t)$ − продольные перемещения поперечных сечений участков стержня 2; x − координата сечения, t – время, a_1 – скорость распространения волны деформации в материале стержня 1; a_2, a_3 − скорость распространения волны деформации в материале стержня 2 на соответствующих участках; l_1 − длина стержня 1, l_2 и l_3 − длины участков стержня 2.

Начальные условия определяют состояние стержней при $t = t_0 = 0$:

$$\frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial t} = V_0, \quad \frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad -l_1 < x \le 0,$$

$$\frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad -l_2 \le x < 0,$$

$$\frac{\partial u_3(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_3(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad 0 < x \le l_3.$$

Краевые условия определяют отсутствие сил в сечениях $x = -l_1$, $x = -l_2$, $x = l_3$:

$$\frac{\partial u_1(-l_1,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_2(-l_2,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_3(l_3,t)}{\partial x} = 0,$$

а также условия взаимодействия стержней 1 и 2 через абсолютно твердое тело 3 в сечении $x = 0$:

$$-E_1A_1\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x}-E_2A_2\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x}+E_3A_3\frac{\partial u_3(0,t)}{\partial x}=0,\ \text{если}\ \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x}<0,$$

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial t}=\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial t},\quad \text{если}\ \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x}<0,$$

$$\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial t}=\frac{\partial u_3(0,t)}{\partial t}.$$

Если происходит отрыв стержня 1 и нет взаимодействия со стержнем 2, то

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial t}=\frac{\partial u_3(0,t)}{\partial t},\ \text{если}\ \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x}\geq 0,$$

$$-E_2A_2\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x}+E_3A_3\frac{\partial u_3(0,t)}{\partial x}=0.$$

Волновая модель неторцевого продольного удара стержней конечной длины через упругий элемент

На рис. 2.21 представлена схема продольного удара стержней конечной длины, когда удар стержня 1 по стержню 2 наносится в сечении $x = 0$ через упругий элемент 3. Массой упругого элемента 3 в рассматриваемом случае пренебрегаем.

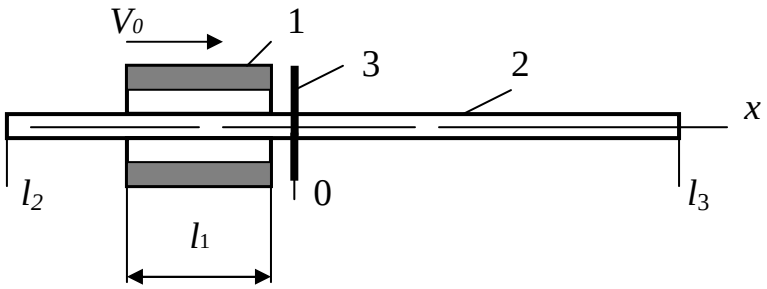


Рис. 2.21. Схема неторцевого продольного удара стержней через упругий элемент

Движение поперечных сечений стержней 1 и 2 описывается волновыми уравнениями вида

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{a_1^{\,2}}\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2}=0,\ -l_1\leq x\leq 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{a_2^{\,2}}\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2}=0,\quad -l_2\leq x\leq 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_3^{\,2}} \frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le x \le l_3,$$

где $u_1(x,t)$ − продольное перемещение поперечного сечения стержня 1; $u_2(x,t), u_3(x,t)$ − продольные перемещения поперечных сечений участков стержня 2; x − координата сечения, t – время, a_1 – скорость распространения волны деформации в материале стержня 1; a_2, a_3 – скорость распространения волны деформации в материале стержня 2 на соответствующих участках; l_1 − длина стержня 1, l_2 и l_3 − длины участков стержня 2.

Начальные условия определяют состояние стержней при $t = t_0 = 0$:

$$\frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial t} = V_0, \quad \frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad -l_1 < x \le 0,$$

$$\frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad -l_2 \le x < 0,$$

$$\frac{\partial u_3(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_3(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad 0 < x \le l_3.$$

Краевые условия определяют отсутствие сил в сечениях $x = -l_1$, $x = -l_2$,

$$x = l_3: \qquad \frac{\partial u_1(-l_1,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_2(-l_2,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_3(l_3,t)}{\partial x} = 0,$$

а также условия взаимодействия стержней 1 и 2 через упругий элемент 3 в сечении $x = 0$:

$$-E_1 A_1 \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} - E_2 A_2 \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x} + E_3 A_3 \frac{\partial u_3(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \text{если} \quad \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} < 0,$$

$$E_1 A_1 \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = k[u_1(0,t) - u_2(0,t)], \quad \text{если} \quad \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} < 0,$$

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial t}, \quad \text{если} \quad \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} < 0,$$

$$\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_3(0,t)}{\partial t}.$$

Если происходит отрыв стержня 1 и нет взаимодействия со стержнем 2, то

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial t}=\frac{\partial u_3(0,t)}{\partial t},\quad \text{если}\quad \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x}\geq 0,$$

$$-E_2A_2\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x}+E_3A_3\frac{\partial u_3(0,t)}{\partial x}=0\,.$$

2.5.15. *Волновая модель продольного удара по стержню с абсолютно твердым телом на упругой подвеске*

На рис. 2.22 представлена схема продольного удара стержней конечной длины, когда в некотором сечении стержня, воспринимающего удар, через упругий элемент закреплено абсолютно твердое тело.

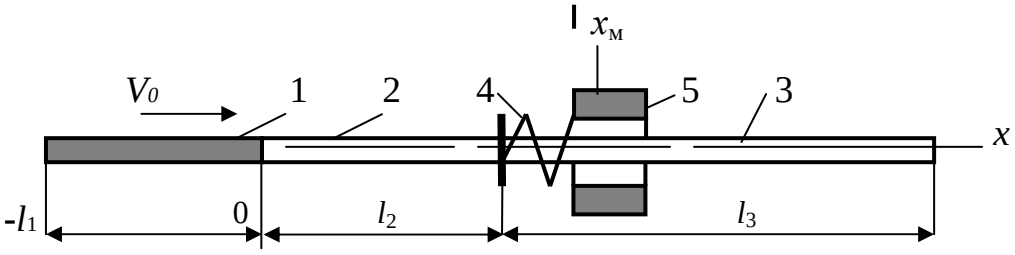


Рис. 2.22. Схема продольного удара стержней

Стержень 1 длиной l_1 движется вдоль оси x со скоростью V_0 и наносит удар по неподвижному стержню 2. Стержень 2 имеет разнородные участки 2 длиной l_2 и 3 длиной l_3. На границе сопряжения участков через упругий элемент 4 закреплено абсолютно твердое тело 5.

Движение поперечных сечений стержней 1 и 2 описывается волновыми уравнениями вида

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{a_1^{\,2}}\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2}=0,\quad -l_1\leq x\leq 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{a_2^{\,2}}\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2}=0,\quad 0\leq x\leq l_2,$$

$$\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{a_3^{\,2}}\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial t^2}=0,\quad l_2\leq x\leq l_2+l_3,$$

где $u_1(x,t)$ − продольное перемещение поперечного сечения стержня 1; $u_2(x,t), u_3(x,t)$ − продольные перемещения поперечных сечений участков стержня 2; x − координата сечения, t – время, a_1 – скорость распространения волны деформации в материале стержня 1; a_2, a_3 – скорость распространения волны деформации в материале стержня 2 на соответствующих участках 2 и 3; l_1 − длина стержня 1, l_2 и l_3 − длины участков стержня 2.

Начальные условия определяют состояние стержней и абсолютно твердого тела при $t = t_0 = 0$:

$$\frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial t} = V_0, \quad \frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad -l_1 < x \le 0,$$

$$\frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad 0 \le x \le l_2,$$

$$\frac{\partial u_3(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_3(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad l_2 \le x \le l_2 + l_3,$$

$$x_м(0) = 0, \quad \dot{x}_м(0) = 0,$$

где $x_м(0)$, $\dot{x}_м(0)$ − координата и скорость абсолютно твердого тела в начальный момент времени.

Краевые условия определяют отсутствие сил в сечениях $x = -l_1$, $x = l_2 + l_3$:

$$\frac{\partial u_1(-l_1,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_3(l_2 + l_3,t)}{\partial x} = 0,$$

условия взаимодействия стержней 1 и 2, а также взаимодействие стержня 2 и абсолютно твердого тела 5 через упругий элемент 4 в сечении $x = 0$:

$$-E_1A_1\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} + E_2A_2\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x} = 0, \text{ если } \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} < 0,$$

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial t}, \text{ если } \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} < 0,$$

$$-E_2A_2\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x} + E_3A_3\frac{\partial u_3(0,t)}{\partial x} + k[u_2(l_2,t) - x_м] = 0,$$

$$M \cdot \ddot{x} = k[u_2(l_2,t) - x_м],$$

$$\frac{\partial u_2(l_2,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_3(l_2,t)}{\partial t},$$

где $к$ − жесткость упругого элемента, M − масса абсолютно твердого тела, $x_м$ − перемещение абсолютно твердого тела относительно начального положения.

2.5.16. *Волновая модель продольного удара по стержню с сосредоточенными массами*

На рис. 2.23 представлена схема продольного удара стержней конечной длины, когда в некоторых сечениях стержня 2, воспринимающего удар, закреплены абсолютно твердые тела массой M_1, M_2, M_3, M_4.

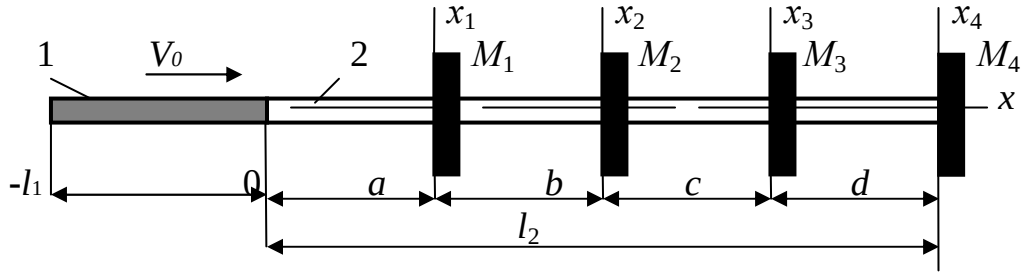


Рис. 2.23. Схема продольного удара по стержню с сосредоточенными массами

Стержень 1 длиной l_1 движется вдоль оси x со скоростью V_0 и наносит удар по неподвижному стержню 2. Стержень 2 имеет разнородные участки длиной a, b, c, d. На границе сопряжения участков закреплены абсолютно твердые тела массой M_1, M_2, M_3, M_4.

Движение поперечных сечений стержней 1 и 2 описывается волновыми уравнениями вида

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1^{\,2}}\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad -l_1 \le x \le 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_2^{\,2}}\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le x \le a,$$

$$\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_3^{\,2}}\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad a \le x \le a+b,$$

$$\frac{\partial^2 u_4(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_4^{\,2}}\frac{\partial^2 u_4(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad a+b \le a+b+c,$$

$$\frac{\partial^2 u_5(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_5^{\,2}}\frac{\partial^2 u_5(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad a+b+c \le x \le l_2,$$

где $u_1(x,t)$ − продольное перемещение поперечных сечений стержня 1; $u_2(x,t), u_3(x,t), u_4(x,t), u_5(x,t)$ − продольные перемещения поперечных сечений участков стержня 2 длиной a, b, c, d; x − координата сечения, t – время, a_1 – скорость распространения волны деформации в материале стержня 1; a_2, a_3, a_4, a_5 – скорость распространения волны деформации в материале стержня

2 на соответствующих участках длиной a, b, c, d; l_1 − длина стержня 1, l_2 − длина стержня 2.

Начальные условия определяют состояние стержней и абсолютно твердых тел при $t = t_0 = 0$:

$$\frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial t} = V_0, \quad \frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad -l_1 < x \le 0,$$

$$\frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad 0 \le x \le a,$$

$$\frac{\partial u_3(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_3(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad a \le x \le a+b,$$

$$\frac{\partial u_4(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_4(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad a+b \le x \le a+b+c,$$

$$\frac{\partial u_5(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_5(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad a+b+c \le x \le l_2,$$

$$x_{м_1}(0) = 0, \quad \dot{x}_{м_1}(0) = 0, \quad x_{м_2}(0) = 0, \quad \dot{x}_{м_2}(0) = 0,$$

$$x_{м_3}(0) = 0, \quad \dot{x}_{м_3}(0) = 0, \quad x_{м4}(0) = 0, \quad \dot{x}_{м4}(0) = 0,$$

где $x_{м_1}(0)$, $x_{м_2}(0)$, $x_{м_3}(0)$, $x_{м4}(0)$ − координаты абсолютно твердых тел в начальный момент времени; $\dot{x}_{м_1}(0)$, $\dot{x}_{м_2}(0)$, $\dot{x}_{м_3}(0)$, $\dot{x}_{м4}(0)$ − скорость абсолютно твердых тел в начальный момент времени.

Краевые условия определяют отсутствие сил в сечении $x = -l_1$:

$$\frac{\partial u_1(-l_1,t)}{\partial x} = 0,$$

а также условия взаимодействия стержней 1, 2 в сечении $x = 0$ и абсолютно твердых тел в сечениях $x = a, b, c, l_2$:

$$-E_1A_1\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} - E_2A_2\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \text{если} \quad \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} < 0,$$

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial t}, \quad \text{если} \quad \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} < 0,$$

$$M_1 \cdot \ddot{x}_1 = -E_2A_2\frac{\partial u_2(a,t)}{\partial x} + E_3A_3\frac{\partial u_3(a,t)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_3(0,t)}{\partial t}, \qquad \dot{x}_1 = \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial t},$$

$$M_2 \cdot \ddot{x}_2 = -E_3 A_3 \frac{\partial u_3(a+b,t)}{\partial x} + E_4 A_4 \frac{\partial u_4(a+b,t)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_3(a+b,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_4(a+b,t)}{\partial t}, \qquad \dot{x}_2 = \frac{\partial u_3(a+b,t)}{\partial t},$$

$$M_3 \cdot \ddot{x}_3 = -E_4 A_4 \frac{\partial u_4(a+b+c,t)}{\partial x} + E_5 A_5 \frac{\partial u_5(a+b+c,t)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_4(a+b+c,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_5(a+b+c,t)}{\partial t}, \qquad \dot{x}_3 = \frac{\partial u_4(a+b+c,t)}{\partial t},$$

$$M_4 \cdot \ddot{x}_4 = -E_5 A_5 \frac{\partial u_5(l_2,t)}{\partial x}, \qquad \dot{x}_4 = \frac{\partial u_5(l_2,t)}{\partial t}.$$

Если происходит отрыв стержня 1 и нет взаимодействия со стержнем 2, то

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_3(0,t)}{\partial t}, \quad \text{если} \quad \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} \geq 0,$$

$$-E_2 A_2 \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x} + E_3 A_3 \frac{\partial u_3(0,t)}{\partial x} = 0.$$

2.5.17. *Волновая модель продольного удара по стержню с сосредоточенными массами на упругих подвесках*

На рис. 2.24 представлена схема продольного удара стержней конечной длины, когда в некоторых сечениях стержня 2, воспринимающего удар, закреплены на упругих подвесках абсолютно твердые тела массой M_1, M_2, M_3, M_4.

Стержень 1 длиной l_1 движется вдоль оси x со скоростью V_0 и наносит удар по неподвижному стержню 2. Стержень 2 имеет разнородные участки длиной a, b, c, d. На границе сопряжения участков на упругих подвесках жесткостью κ_1, κ_2, κ_3 и κ_4 закреплены абсолютно твердые тела массой M_1, M_2, M_3 и M_4.

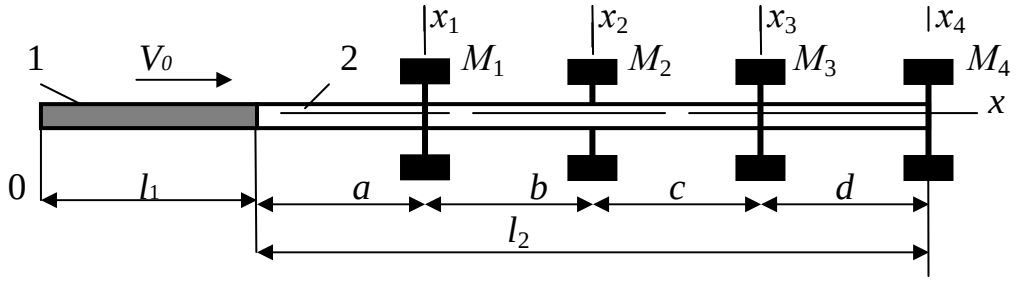


Рис. 2.24. Схема продольного удара по стержню с сосредоточенными массами на упругих подвесках

Движение поперечных сечений стержней 1 и 2 описывается волновыми уравнениями вида

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1^{\,2}}\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad -l_1 \le x \le 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_2^{\,2}}\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le x \le a,$$

$$\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_3^{\,2}}\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad a \le x \le a+b,$$

$$\frac{\partial^2 u_4(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_4^{\,2}}\frac{\partial^2 u_4(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad a+b \le a+b+c,$$

$$\frac{\partial^2 u_5(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_5^{\,2}}\frac{\partial^2 u_5(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad a+b+c \le x \le l_2,$$

где $u_1(x,t)$ − продольное перемещение поперечных сечений стержня 1; $u_2(x,t), u_3(x,t), u_4(x,t), u_5(x,t)$ − продольные перемещения поперечных сечений участков стержня 2 длиной *a, b, c, d*; x − координата сечения, *t* – время, a_1 – скорость распространения волны деформации в материале стержня 1; a_2, a_3, a_4, a_5 – скорость распространения волны деформации в материале стержня 2 на соответствующих участках длиной *a, b, c, d*; l_1 − длина стержня 1, l_2 − длина стержня 2.

Начальные условия определяют состояние стержней и абсолютно твердых тел при $t = t_0 = 0$:

$$\frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial t} = V_0, \quad \frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad -l_1 < x \le 0,$$

$$\frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad 0 \le x \le a,$$

$$\frac{\partial u_3(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_3(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad a \le x \le a+b,$$

$$\frac{\partial u_4(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_4(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad a+b \le x \le a+b+c,$$

$$\frac{\partial u_5(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_5(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad a+b+c \le x \le l_2,$$

$$x_{м_1}(0) = 0, \quad \dot{x}_{м_1}(0) = 0, \quad x_{м_2}(0) = 0, \quad \dot{x}_{м_2}(0) = 0,$$

$$x_{м_3}(0) = 0, \quad \dot{x}_{м_3}(0) = 0, \quad x_{м4}(0) = 0, \quad \dot{x}_{м4}(0) = 0,$$

где $x_{м_1}(0)$, $x_{м_2}(0)$, $x_{м_3}(0)$, $x_{м4}(0)$ − координаты абсолютно твердых тел в начальный момент времени; $\dot{x}_{м_1}(0)$, $\dot{x}_{м_2}(0)$, $\dot{x}_{м_3}(0)$, $\dot{x}_{м4}(0)$ − скорость абсолютно твердых тел в начальный момент времени.

Краевые условия определяют отсутствие сил в сечении $x = -l_1$:

$$\frac{\partial u_1(-l_1,t)}{\partial x} = 0,$$

а также условия взаимодействия стержней 1, 2 в сечении $x = 0$ и абсолютно твердых тел в сечениях $x = a, b, c, l_2$:

$$-E_1A_1\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} - E_2A_2\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x} = 0, \text{ если } \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} < 0,$$

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial t}, \quad \text{если } \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} < 0,$$

$$M_1 \cdot \ddot{x}_1 = k_1[u_2(a,t) - x_1],$$

$$-k_1[u_2(a,t) - x_1] - E_2A_2\frac{\partial u_2(a,t)}{\partial x} + E_3A_3\frac{\partial u_3(a,t)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_3(0,t)}{\partial t}, \quad M_2 \cdot \ddot{x}_2 = k_2[u_3(a+b,t) - x_2],$$

$$-k_2[u_3(a+b,t) - x_2] - E_3A_3\frac{\partial u_3(a+b,t)}{\partial x} + E_4A_4\frac{\partial u_4(a+b,t)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u_3(a+b,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_4(a+b,t)}{\partial t},$$

$$M_3 \cdot \ddot{x}_3 = k_3[u_4(a+b+c,t) - x_3],$$

$$-k_3[u_4(a+b+c,t) - x_3] - E_4A_4\frac{\partial u_4(a+b+c,t)}{\partial x} + E_5A_5\frac{\partial u_5(a+b+c,t)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u_4(a+b+c,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_5(a+b+c,t)}{\partial t},$$

$$M_4 \cdot \ddot{x}_4 = k_4[u_5(l_2,t) - x_4], \quad k_4[u_5(l_2,t) - x_4] + E_5A_5\frac{\partial u_5(l_2,t)}{\partial x} = 0,$$

$$\dot{x}_4 = \frac{\partial u_5(l_2,t)}{\partial t}.$$

Если происходит отрыв стержня 1 и нет взаимодействия со стержнем 2, то

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x}=0,\quad \text{если}\ \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x}\geq 0\,.$$

2.5.18. *Волновая модель продольного удара по стержню с закрепленной сосредоточенной массой на торце*

На рис. 2.25 представлена схема продольного удара стержня 1 длиной l_1 о стержень 2 длиной l_2.

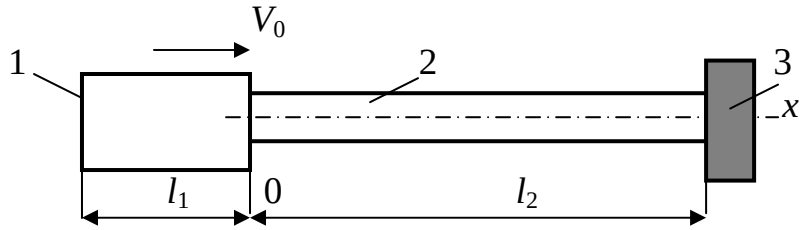


Рис. 2.25. Схема продольного удара по стержню с закрепленной сосредоточенной массой на торце

Движение поперечных сечений стержней 1 и 2 описывается волновыми уравнениями вида

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{a_1^{\,2}}\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2}=0,\quad -l_1\leq x\leq 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{a_2^{\,2}}\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2}=0,\quad 0\leq x\leq l_2,$$

где $u_1(x,t)$ − продольное перемещение поперечных сечений стержня 1; $u_2(x,t)$ − продольные перемещения поперечных сечений стержня 2 x − координата сечения, t – время, a_1 – скорость распространения волны деформации в материале стержня 1; a_2 – скорость распространения волны деформации в материале стержня 2, l_1 − длина стержня 1, l_2 − длина стержня 2.

Начальные условия определяют состояние стержней и абсолютно твердого тела при $t=t_0=0$:

$$\frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial t}=V_0,\quad \frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial x}=0,\quad -l_1<x\leq 0\,,$$

$$\frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial x}=0\,,\quad 0\leq x\leq l_2\,.$$

Краевые условия определяют отсутствие сил в сечении $x=-l_1$:

$$\frac{\partial u_1(-l_1,t)}{\partial x}=0,$$

а также условия взаимодействия стержней 1, 2 в сечении $x = 0$ и абсолютно твердого тела в сечении $x = l_2$:

$$-E_1A_1\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x}-E_2A_2\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x}=0,\ \text{если}\ \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x}<0,$$

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial t}=\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial t},\quad \text{если}\ \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x}<0,$$

$$M\cdot\frac{\partial^2 u(l_2,t)}{\partial t^2}=-E_2A_2\frac{\partial u_2(l_2,t)}{\partial x}.$$

2.5.19. *Волновая модель продольного удара неоднородных стержней с упругими элементами на границах разнородных участков*

На рис. 2.26 представлена схема продольного удара стержня 1 по стержневой системе, состоящей из разнородных стержней 2, 3 и 4. Удар стержня 1 по стержню 2 наносится через линейный упругий элемент, имеющий жесткость k_1. Связь между стержнями 1 и 2 неудерживающая. Стержни 2 и 3, 3 и 4 связаны между собой линейными упругими элементами k_2 и k_3.

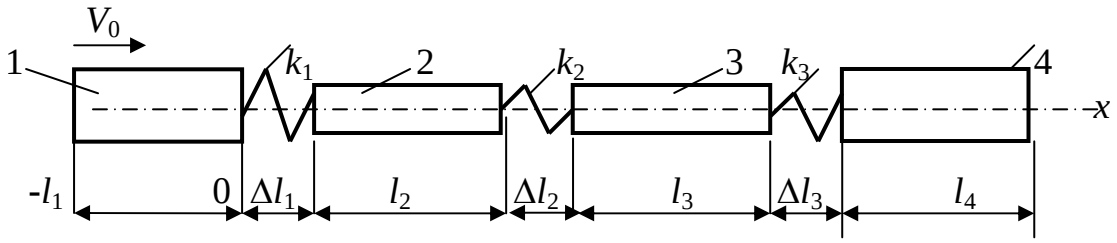


Рис. 2.26. Схема продольного удара неоднородных стержней с упругими элементами на границах разнородных участков

Стержень 1 до удара имеет скорость V_0. Стержни 2, 3 и 4 до удара находятся в состоянии покоя, деформации в поперечных сечениях стержней отсутствуют.

Движение поперечных сечений стержней 1 и 2 описывается волновыми уравнениями вида

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{a_1^{\,2}}\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2}=0,\ -l_1\le x\le 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_2^{\,2}} \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta l_1 \le x \le \Delta l_1 + l_2,$$

$$\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_3^{\,2}} \frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta l_1 + l_2 + \Delta l_2 \le x \le \Delta l_1 + l_2 + \Delta l_2 + l_3,$$

$$\frac{\partial^2 u_4(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_4^{\,2}} \frac{\partial^2 u_4(x,t)}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta l_1 + l_2 + \Delta l_2 + l_3 + \Delta l_3 \le x \le \Delta l_1 + l_2 + \Delta l_2 + l_3 + \Delta l_3 + l_4,$$

где $u_1(x,t)$ − продольное перемещение поперечных сечений стержня 1; $u_2(x,t), u_3(x,t), u_4(x,t)$ − продольные перемещения поперечных сечений участков стержней 2, 3 и 4; x − координата сечения, t – время, a_1 – скорость распространения волны деформации в материале стержня 1; a_2, a_3, a_4 – скорость распространения волны деформации в материале стержня 2, 3 и 4; l_1 − длина стержня 1, l_2 − длина стержня 2, l_3 − длина стержня 3, l_4 − длина стержня 4; Δl_1, Δl_2, Δl_3, Δl_4 − длина упругих элементов.

Начальные условия определяют состояние стержней при $t = t_0 = 0$:

$$\frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial t} = V_0, \quad \frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad -l_1 < x \le 0,$$

$$\frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad \Delta l_1 \le x \le \Delta l_1 + l_2,$$

$$\frac{\partial u_3(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_3(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad \Delta l_1 + l_2 + \Delta l_2 \le x \le \Delta l_1 + l_2 + \Delta l_2 + l_3,$$

$$\frac{\partial u_4(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_4(x,t_0)}{\partial x} = 0,$$

$$\Delta l_1 + l_2 + \Delta l_2 + l_3 + \Delta l_3 \le x \le \Delta l_1 + l_2 + \Delta l_2 + l_3 + \Delta l_3 + l_4.$$

Краевые условия определяют отсутствие сил в сечениях $x = -l_1$ и $x = \Delta l_1 + l_2 + \Delta l_2 + l_3 + \Delta l_3 + l_4$:

$$\frac{\partial u_1(-l_1,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_4(\Delta l_1 + l_2 + \Delta l_2 + l_3 + \Delta l_3 + l_4, t)}{\partial x} = 0,$$

а также условия взаимодействия стержней 1, 2 в сечении $x = 0$ и стержней 2, 3, 4 в сечениях $x = \Delta l_1 + l_2$, $x = \Delta l_1 + l_2 + \Delta l_2 + l_3$:

$$-E_1A_1\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} + E_2A_2\frac{\partial u_2(\Delta l_1,t)}{\partial x} = 0, \quad \text{если} \quad \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} < 0,$$

$$E_1A_1\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} + k_1[u_1(0,t) - u_2(\Delta l_1,t)] = 0, \quad \text{если} \quad u_1(0,t) - u_2(\Delta l_1,t) \le \Delta l_1,$$

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_2(\Delta l_1,t)}{\partial x} = 0, \quad \text{если} \quad u_1(0,t) - u_2(\Delta l_1,t) > \Delta l_1,$$

$$-E_2A_2\frac{\partial u_2(\Delta l_1 + l_2,t)}{\partial x} + E_3A_3\frac{\partial u_3(\Delta l_1 + l_2 + \Delta l_2,t)}{\partial x} = 0,$$

$$E_2A_2\frac{\partial u_2(\Delta l_1 + l_2,t)}{\partial x} + k_2[u_2(\Delta l_1 + l_2,t) - u_3(\Delta l_1 + l_2 + \Delta l_2,t)] = 0,$$

$$-E_3A_3\frac{\partial u_3(\Delta l_1 + l_2 + \Delta l_2 + l_3,t)}{\partial x} + E_4A_4\frac{\partial u_4(\Delta l_1 + l_2 + \Delta l_2 + l_3 + \Delta l_3,t)}{\partial x} = 0,$$

$$E_3A_3\frac{\partial u_3(\Delta l_1 + l_2 + \Delta l_2 + l_3,t)}{\partial x} +$$
$$+ k_3[u_3(\Delta l_1 + l_2 + \Delta l_2 + l_3,t) - u_4(\Delta l_1 + l_2 + \Delta l_2 + l_3 + \Delta l_3,t)] = 0,$$

где κ_1, κ_2, κ_3 − жесткость линейных упругих элементов; E_1A_1, E_2A_2, E_3A_3, E_4A_4 − продольная жесткость поперечных сечений стержней 1, 2, 3 и 4.

2.5.20. *Волновая модель продольного удара в стержневой системе при наличии зазора между стержнями*

Рассмотрим схему продольного удара стержней 1 и 2 конечной длины, когда стержень 2, воспринимающий удар, соединен с полуограниченным стержнем 3 и в этом соединении имеется зазор Δ между торцами стержней 2 и 3 (рис. 2.27). Стержень 1 движется в направлении стержня 2 со скоростью V_0 и в момент времени $t = 0$ наносит удар по стержню 2. До нанесения удара стержни 2 и 3 находятся в состоянии покоя и не имеют начальных деформаций.

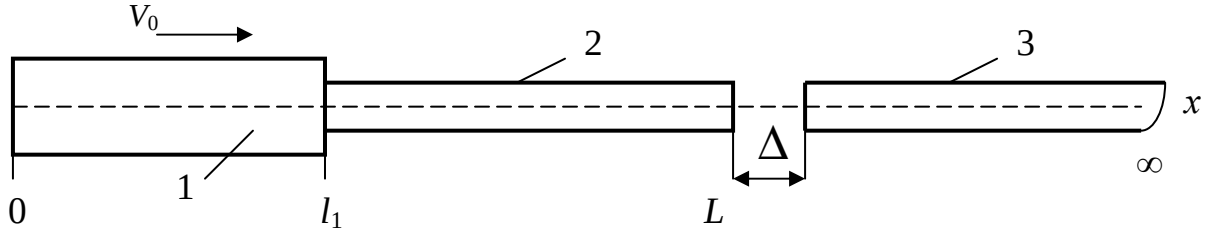


Рис. 2.27. Схема продольного удара в стержневой системе с зазором между стержнями

Воспринимая удар, стержень 2 начнет двигаться. Как только перемещение сечения $x = L$ 2-го стержня превысит величину Δ, начнется взаимодействие стержней 2 и 3.

Движение поперечных сечений стержней 1, 2 и 3 описывается волновыми уравнениями вида

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1^{\,2}} \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 \le x \le l_1,$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_2^{\,2}} \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad l_1 \le x \le L,$$

$$\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_3^{\,2}} \frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad L + \Delta \le x < \infty,$$

где $u_1(x,t)$ − продольное перемещение поперечных сечений стержня 1; $u_2(x,t)$, $u_3(x,t)$ − продольные перемещения поперечных сечений стержней 2 и 3; x − координата сечения, t – время, a_1 – скорость распространения волны деформации в материале стержня 1; a_2, a_3 – скорость распространения волны деформации в материале стержня 2 и 3; l_1 − длина стержня 1, L − суммарная длина стержней 1 и 2.

Начальные условия определяют состояние стержней при $t = t_0 = 0$:

$$\frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial t} = V_0, \quad \frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad 0 \le x \le l_1,$$

$$\frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad l_1 \le x \le L,$$

$$\frac{\partial u_3(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_3(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad L \le x < \infty.$$

Краевые условия определяют отсутствие сил в сечениях $x = 0$ и $x = \infty$:

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_3(\infty,t)}{\partial x} = 0,$$

а также условия взаимодействия стержней 1, 2 в сечении $x = l_1$ и стержней 2, 3 в сечении $x = L + \Delta$:

$$-E_1 A_1 \frac{\partial u_1(l_1,t)}{\partial x} + E_2 A_2 \frac{\partial u_2(l_1,t)}{\partial x} = 0, \text{ если } \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} < 0,$$

$$E_1A_1\frac{\partial u_1(l_1,t)}{\partial x}=0,\qquad E_2A_2\frac{\partial u_2(l_1,t)}{\partial x}=0,\quad \text{если}\ \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x}\geq 0,$$

$$E_2A_2\frac{\partial u_2(L,t)}{\partial x}=0,\quad E_3A_3\frac{\partial u_3(L+\Delta,t)}{\partial x}=0,\quad \text{если}\ u_2(L,t)-u_3(L+\Delta,t)<\Delta,$$

$$-E_2A_2\frac{\partial u_2(L,t)}{\partial x}+E_3A_3\frac{\partial u_3(L+\Delta,t)}{\partial x}=0,\quad \text{если}\ u_2(L,t)-u_3(L+\Delta,t)<\Delta.$$

2.5.21. *Волновая модель продольного удара в стержневой системе при наличии зазора и упругого элемента между стержнями*

Рассмотрим схему продольного удара стержней 1 и 2 конечной длины, когда стержень 2, воспринимающий удар, соединен с полуограниченным стержнем 3 и в этом соединении имеется зазор Δ и сосредоточенный упругий элемент 4 между торцами стержней 2 и 3 (рис. 2.28). Жесткость упругого элемента равна κ.

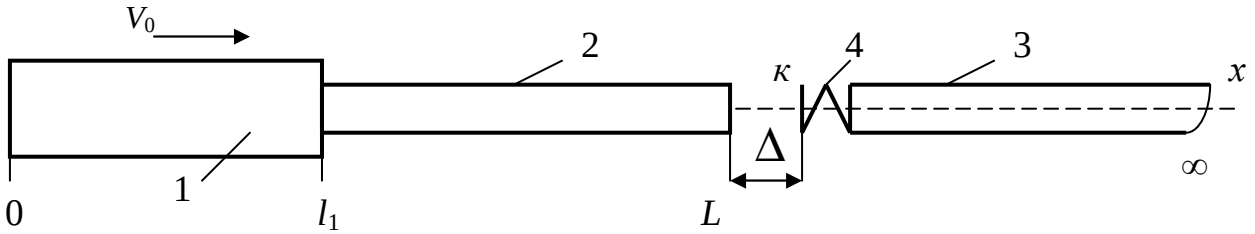


Рис. 2.28. Схема продольного удара в стержневой системе с зазором и упругим элементом между стержнями

Стержень 1 движется в направлении стержня 2 со скоростью V_0 и в момент времени $t=0$ наносит удар по стержню 2. До нанесения удара стержни 2 и 3 находятся в состоянии покоя и не имеют начальных деформаций.

Воспринимая удар, стержень 2 начнет двигаться. Как только перемещение сечения $x=L$ 2-го стержня превысит величину Δ, начнется взаимодействие стержней 2 и 3.

Движение поперечных сечений стержней 1, 2 и 3 описывается волновыми уравнениями вида

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{a_1^{\,2}}\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2}=0,\qquad 0\leq x\leq l_1,$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{a_2^{\,2}}\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2}=0,\quad l_1\leq x\leq L,$$

$$\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{a_3^{\,2}}\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial t^2}=0,\quad L+\Delta\leq x<\infty,$$

где $u_1(x,t)$ − продольное перемещение поперечных сечений стержня 1; $u_2(x,t)$, $u_3(x,t)$ − продольные перемещения поперечных сечений стержней 2 и 3; x − координата сечения, t – время, a_1 – скорость распространения волны деформации в материале стержня 1; a_2, a_3 – скорость распространения волны деформации в материале стержня 2 и 3; l_1 − длина стержня 1, L − суммарная длина стержней 1 и 2.

Начальные условия определяют состояние стержней при $t = t_0 = 0$:

$$\frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial t} = V_0, \quad \frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad 0 \le x \le l_1,$$

$$\frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad l_1 \le x \le L,$$

$$\frac{\partial u_3(x,t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_3(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad L \le x < \infty.$$

Краевые условия определяют отсутствие сил в сечениях $x = 0$ и $x = \infty$:

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_3(\infty,t)}{\partial x} = 0,$$

а также условия взаимодействия стержней 1, 2 в сечении $x = l_1$ и стержней 2, 3 в сечении $x = L + \Delta$:

$$-E_1A_1\frac{\partial u_1(l_1,t)}{\partial x} + E_2A_2\frac{\partial u_2(l_1,t)}{\partial x} = 0, \text{ если } \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} < 0,$$

$$E_1A_1\frac{\partial u_1(l_1,t)}{\partial x} = 0, \qquad E_2A_2\frac{\partial u_2(l_1,t)}{\partial x} = 0, \text{ если } \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} \ge 0,$$

$$E_2A_2\frac{\partial u_2(L,t)}{\partial x} = 0, \quad E_3A_3\frac{\partial u_3(L+\Delta,t)}{\partial x} = 0, \text{ если } u_2(L,t) - u_3(L+\Delta,t) < \Delta,$$

$$-E_2A_2\frac{\partial u_2(L,t)}{\partial x} + E_3A_3\frac{\partial u_3(L+\Delta,t)}{\partial x} = 0, \text{ если } u_2(L,t) - u_3(L+\Delta,t) < \Delta,$$

$$E_2A_2\frac{\partial u_2(L,t)}{\partial x} + k[u_2(L,t) - u_3(L+\Delta,t)] = 0, \text{ если } u_2(L,t) - u_3(L+\Delta,t) > \Delta.$$

2.6. Волновая модель продольного удара стержня с изменяющейся продольной жесткостью поперечных сечений

Исследования продольного удара стержней с непрерывно изменяющейся продольной жесткостью были начаты в работах Алимова О. Д., Дворникова Л. Т., Шапошникова И. Д. [12, 61], получили существенное развитие в работах Дворникова Л. Т., Мясникова А. А., Жукова И. А. [58, 156 – 159, 70]. Получены интересные результаты в этом направлении в работах Алимова О. Д., Еремьянца В. Э., Манжосова В. К. [21, 22, 124,128, 134, 137].

Рассмотрим схему продольного удара стержня с изменяющейся продольной жесткостью поперечных сечений (рис. 2.29). Стержень 1 длиной l, перемещаясь вдоль оси x со скоростью V_0, наносит удар по абсолютно жесткой преграде 2. Изменение продольной жесткости поперечных сечений стержня возникает из-за изменения площади поперечных сечений по длине стержня $A = A(x)$.

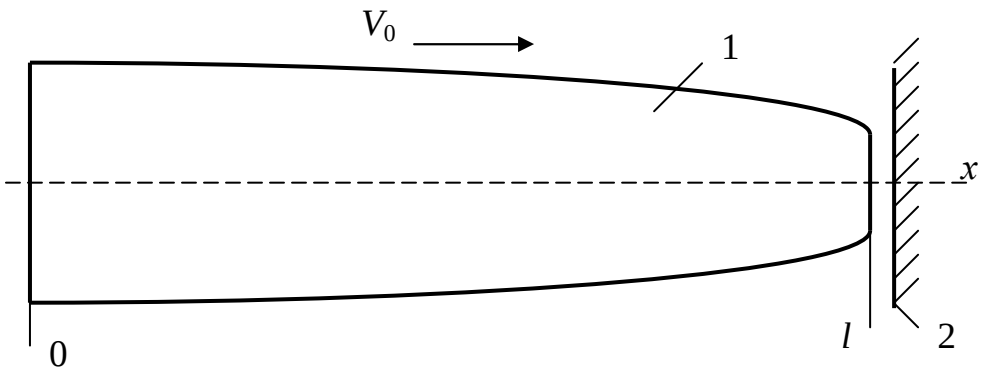


Рис. 2.29. Схема продольного удара стержня с изменяющейся продольной жесткостью поперечных сечений

Предполагаем возможность использования модели плоского удара. Движение поперечных сечений стержня из (2.4) описывается уравнением

$$E\frac{\partial}{\partial x}\left[A(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]-\rho A(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t^2}=0,\quad 0\le x\le l,$$

или с учетом, что $\rho / E = 1/a^2$,

$$A(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial A(x)}{\partial x}\cdot\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-\frac{A(x)}{a^2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t^2}=0,\quad 0\le x\le l.$$

где E – модуль упругости 1-го рода материала стержня, A – площадь поперечного сечения, ρ – плотность материала, $u(x,t)$ – продольное перемещение поперечного сечения, l – длина стержня, x – координата , t – время,

$\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ – продольная деформация в поперечном сечении, $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ – ускорение поперечного сечения.

Начальные условия при $t = 0$:

$$u(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \begin{cases} V_0, & 0 \le x < l, \\ 0, & x = l. \end{cases}$$

Граничные условия для схемы, представленной на рис. 2.29, следующие:

при $x = 0$ $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$, при $x = l$ $\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial t} = 0$, если $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} < 0$,

при $x = l$ $\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0$, если $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} \ge 0$.

Рассмотрим модели продольного удара стержней различной формы.

2.6.1. *Модель продольного удара конического стержня о жесткую преграду*

Модель продольного удара конического стержня о жесткую преграду описана в работах [120, 124]. Схема продольного удара конического стержня о жесткую преграду изображена на рис. 2.30.

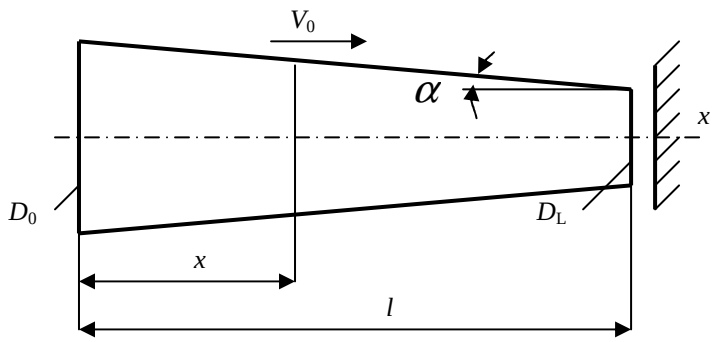


Рис. 2.30. Схема продольного удара конического стержня о жесткую преграду

Конический стержень длиной l движется в направлении продольной оси со скоростью v_0 и своим торцом наносит удар по абсолютно жесткой преграде. Угол уклона конуса равен α, диаметр ударного сечения стержня равен D_L, диаметр начального сечения стержня равен D_0.

Движение поперечных сечений стержня описывается дифференциальным уравнением вида

$$A(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial A(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{A(x)}{a^2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le x \le l.$$

где A(x) – площадь поперечного сечения, a – скорость звука в материале стержня, $u(x,t)$ – продольное перемещение поперечного сечения, l – длина стержня, x – координата , t – время, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ – продольная деформация в поперечном сечении, $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ – ускорение поперечного сечения.

Начальные условия при $t = 0$:

$$u(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = v_0.$$

Граничные условия характеризуют отсутствие деформаций в сечении $x = 0$, отсутствие перемещений в ударном сечении $x = l$ (если имеет место взаимодействие стержня с абсолютно жесткой преградой, когда $\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} < 0$), отсутствие деформаций в ударном сечении $x = l$ (если происходит разрыв контакта стержня и абсолютно жесткой преграды):

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad u(l,t) = 0, \text{ если } \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} < 0,$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \quad \text{если } \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} \geq 0.$$

Площадь поперечного сечения конического стержня, положение которого определяется координатой x, связана с диаметрами начального D_0 и ударного D_L сечений, а также длиной стержня l следующим соотношением

$$A = \frac{\pi}{4}\left(D_0 - \frac{D_0 - D_L}{l}x\right)^2.$$

Масса конического стержня в зависимости от диаметра ударного сечения D_L, длины стержня l и угла уклона конуса α определится как

$$m_c = \int_0^l \rho A dx = \frac{\pi\rho l}{4}\left(D_L^2 + 2D_L l \cdot tg\,\alpha + \frac{4}{3}l^2 \cdot tg^2\alpha\right).$$

В процессе решения задачи нас естественным образом будет интересовать вопрос о том, как влияет угол уклона конуса α на характер ударного нагружения стержня. Но для различных α необходимо сохранить постоянным значение как предударной скорости v_0 конического стержня, так и массу стержня m_c.

Пусть масса конического стержня соответствует массе цилиндрического стержня длиной l, имеющем диаметр поперечного сечения D_c,

$$m_c = \frac{\pi\rho l}{4} D_c^2 .$$

Тогда соотношение между диаметром ударного сечения D_L, диаметром D_c, длиной стержня l и углом α определится как

$$D_L = -l \cdot tg\alpha + \sqrt{D_c^2 + l^2 tg^2\alpha - \frac{4}{3} l^2 tg^2\alpha} .$$

Диаметр начального сечения D_0 конического стержня равен

$$D_0 = D_L + 2l \cdot tg\alpha..$$

2.6.2. *Волновая модель продольного удара конического стержня о жесткую преграду при аппроксимации конической поверхности последовательно сопряженными цилиндрическими участками*

Волновая модель продольного удара конического стержня о жесткую преграду при аппроксимации конической поверхности последовательно сопряженными цилиндрическими участками рассмотрена в работе [128].

Схема продольного удара конического стержня о жесткую преграду изображена на рис. 2.31.

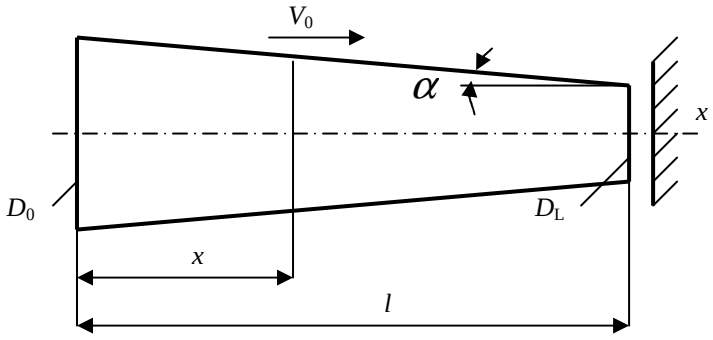


Рис. 2.31. Схема ударной системы

Представим конический стержень в виде множества последовательно сопряженных цилиндрических участков (рис. 2.32).

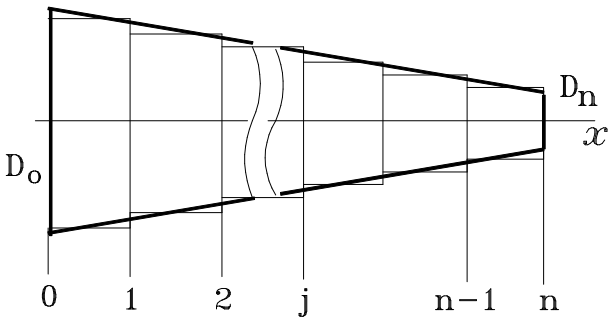


Рис. 2.32. Схема последовательного сопряжения участков

Чтобы цилиндрические участки моделировали в той или иной степени приближения конические участки, длина участка должна быть малой (например, $\Delta l = 0{,}01l$), диаметр поперечного участка сечения должен учитывать изменение диаметра сечения конического стержня по длине, масса цилиндрического участка должна быть равна массе соответствующего конического участка.

Рассмотрим j-й участок конического стержня длиной Δl (рис. 2.33), ограниченный сечениями j-1 и j (D_{j-1} и D_j − диаметры соответствующих поперечных сечений конического участка).

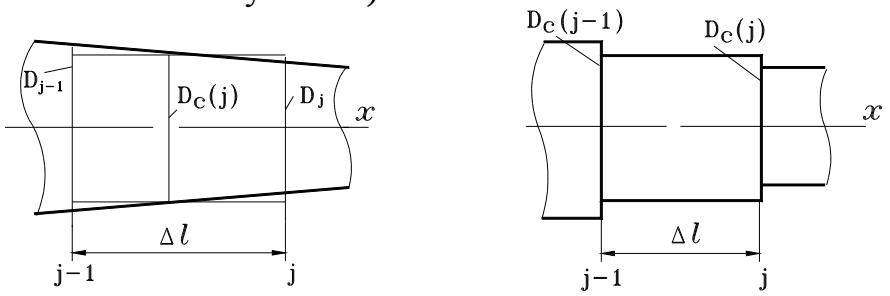


Рис. 2.33. Аппроксимация конического участка стержня цилиндрическим

Аппроксимация конического участка цилиндрическим должна быть такой, чтобы масса цилиндрического участка при длине Δl была равна массе конического участка. Для этого необходимо, чтобы диаметр цилиндрического участка $D_c(j)$ был равен

$$D_c(j) = \sqrt{D_{J-1}^2 - D_{J-1}\alpha \cdot \Delta l \cdot tg\alpha + \frac{4}{3}(\Delta l \cdot tg\alpha)^2}, \quad j = 1,2,...,n .$$

Итак, конический стержень представлен n- м количеством цилиндрических участков малой длины, диаметр которых в пределах произвольного j-го участка определяется приведенной выше формулой. Движение поперечных сечений на произвольном j-м участке опишем дифференциальным уравнением вида

$$\frac{\partial^2 u_J(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_J^2}\frac{\partial^2 u_J(x,t)}{\partial t^2} = 0, \; x_{J-1} \le x \le x_J, \quad j = 1,2,...,n.$$

где $u_j(x_1 t)$ – перемещение поперечного сечения вдоль оси x на j-ом участке стержня, a_j – скорость распространения волны на j-ом участке, x_{j-1} и x_j – координаты $j-1$-го и j-го поперечных сечений.

Начальные условия

$$u_J(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u_J(x,0)}{\partial t} = v_0(x), \quad j = 1,2,...n$$

определяют перемещение и скорости поперечных сечений в начальный момент времени.

Граничные условия характеризуют равенство перемещений сопряженных сечений и условия равновесия продольных сил на границе сопряженных участков

$$u_{J-1}\left(x_{J,}t\right)=u_J\left(x_{J,}t\right), \qquad j=1,2,\ldots,n-1,$$

$$-E_{J-1}A_{J-1}\frac{\partial u_{J-1}\left(x_J,t\right)}{\partial x}+E_J A_J\frac{\partial u_J\left(x_J,t\right)}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial u_1\left(0,t\right)}{\partial x}=0,\ \ u_n\left(x_n,t\right)=0,\ \text{ если }\ \frac{\partial u_n\left(x_n,t\right)}{\partial x}<0;$$

$$\frac{\partial u_n\left(x_n,t\right)}{\partial x}=0;\ \text{ если }\ \frac{\partial u_n\left(x_n,t\right)}{\partial x}\geq 0,$$

где $u_{j-1}(x_{j,}t)$, $u_j(x_{j,}t)$ – перемещения сопряженных поперечных сечений $j-1$-го и j-го участков, положение которых определяется координатой x_j; E_{j-1} и E_j – модуль упругости материала стержня соответственно на $j-1$-ом и j-ом участках, $\frac{\partial u_1(o,t)}{\partial x}$ – продольная деформация на 1-ом участке стержня в сечении $x=0$, $u_n(x_j,t)$ – продольное перемещение ударного сечения стержня, положение которого определяется координатой x_n, $\frac{\partial u_n(x_n,t)}{\partial x}$ – продольная деформация в ударном сечении стержня.

2.6.3. *Волновая модель продольного удара конического стержня об однородный полуограниченный стержень*

Волновая модель продольного удара конического стержня об однородный полуограниченный стержень (модель Алимова О. Д. - Дворникова Л. Т. - Шапошникова И. Д.) описана в работах [12, 21, 22, 134, 137, 219].

Схема ударной системы изображена на рис. 2.34.

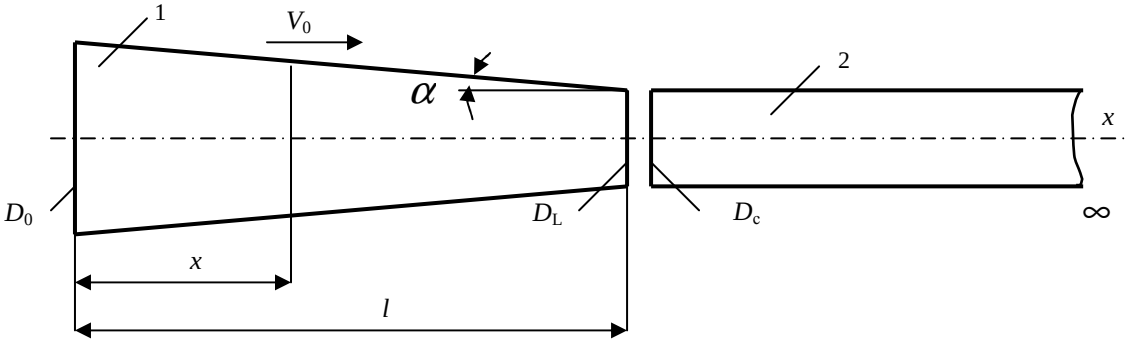


Рис. 2.34. Схема ударной системы

Конический стержень 1 длиной l движется в направлении продольной оси x со скоростью V_0 и своим торцом в момент времени $t=0$ наносит удар по неподвижному полуограниченному стержню 2. Угол уклона конуса равен α, диаметр ударного сечения стержня равен D_L, диаметр начального сечения стержня равен D_0, диаметр полуограниченного стержня равен D_c.

Движение поперечных сечений конического стержня 1 описывается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[E_1 A_1 \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\right] - \rho_1 A_1 \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le x \le l,$$

где E_1 – модуль упругости 1-го рода материала стержня, A_1 – площадь поперечного сечения , ρ_1 – плотность материала, $u_1(x,t)$ – продольное перемещение поперечного сечения стержня 1, l – длина стержня, x – координата, t – время, $\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}$ – продольная деформация в поперечном сечении, $\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2}$ – ускорение поперечного сечения.

Начальные условия для конического стержня:

$$\text{при } t=0 \qquad u_1(x,0)=0, \quad \frac{\partial u_1(x,0)}{\partial t} = V_0.$$

Движение поперечных сечений полуограниченного стержня 2 описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_2^2}\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} = 0, \qquad l \le x < \infty,$$

где $u_2(x,t)$ − продольное перемещение поперечного сечения стержня 2, a_2 − скорость распространения волны деформации в материале стержня 2.

Начальные условия для полуограниченного стержня 2:

$$\text{при } t=0 \qquad u_2(x,0)=0, \quad \frac{\partial u_2(x,0)}{\partial t} = 0.$$

Граничные условия характеризуют отсутствие деформаций в начальном сечении $x=0$ стержня 1

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} = 0,$$

совместные перемещения ударных сечений $x=l$ стержней при их взаимодействии

$$\frac{\partial u_1(l,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_2(l,t)}{\partial t}, \qquad \text{если } \frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x} < 0,$$

равенство продольных сил в ударных сечениях соударяющихся стержней при их взаимодействии

$$E_1 A_1 \frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x} = E_2 A_2 \frac{\partial u_2(l,t)}{\partial x}, \qquad \text{если} \quad \frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x} < 0,$$

отсутствие деформаций в бесконечно удаленном сечении $x = \infty$ 2-го стержня

$$\frac{\partial u_2(\infty,t)}{\partial x} = 0.$$

Если условие взаимодействия ударных сечений соударяющихся стержней не выполняется, т. е. $\frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x} \geq 0,$ то граничные условия принимают вид:

$$\frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_2(l,t)}{\partial x} = 0, \quad \text{если } u_1(l,t) \leq u_2(l,t).$$

Площадь поперечного сечения A_1 конического стержня, положение которого определяется координатой *x*, связана с диаметрами начального D_0 и ударного D_L сечений, длиной стержня *l* и углом уклона конуса α следующим соотношением

$$A_1 = \frac{\pi}{4}\left(D_0 - 2x \cdot tg\,\alpha\right)^2, \quad D_0 = D_L + 2l \cdot tg\,\alpha, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Масса однородного конического стержня в зависимости от диаметра ударного сечения D_L, длины стержня *l* и угла уклона конуса α определится как

$$m_k = \int_0^l \rho_1 A_1 dx = \frac{\pi \rho_1 l}{4}\left(D_L^2 + 2D_L l \cdot tg\alpha + \frac{4}{3} l^2 \cdot tg^2\alpha\right).$$

2.6.4. *Волновая модель продольного удара конического стержня о полуограниченный стержень при аппроксимации конической поверхности последовательно сопряженными цилиндрическими участками*

Волновая модель продольного удара конического стержня о полуограниченный стержень при аппроксимации конической поверхности последовательно сопряженными цилиндрическими участками описана в работах [21, 22, 134, 219]. Представим ударную систему в виде множества последовательно сопряженных цилиндрических участков (рис. 2.35).

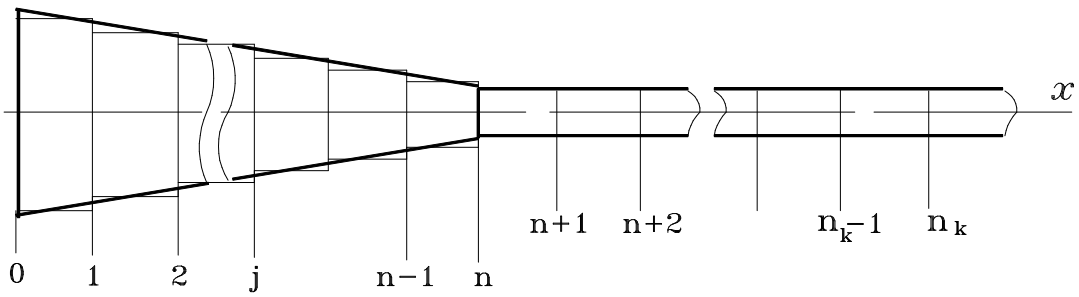


Рис. 2.35. Схема последовательно сопряженных цилиндрических участков, моделирующих свойства конического и полуограниченного стержней

Конический стержень представлен n-м количеством цилиндрических участков. Часть полуограниченного стержня представлена $(n_k - n)$-м количеством сопряженных участков. Полагаем, что оставшаяся часть полуограниченного стержня однородна и ее свойства соответствуют свойствам n_k-го участка.

Чтобы цилиндрические участки моделировали в той или иной степени приближения конические участки, длина участка должна быть малой (например, $\Delta l = 0{,}01l$), диаметр поперечного участка сечения должен учитывать изменение диаметра сечения конического стержня по длине (рис. 2.36), масса цилиндрического участка должна быть равна массе соответствующего конического участка.

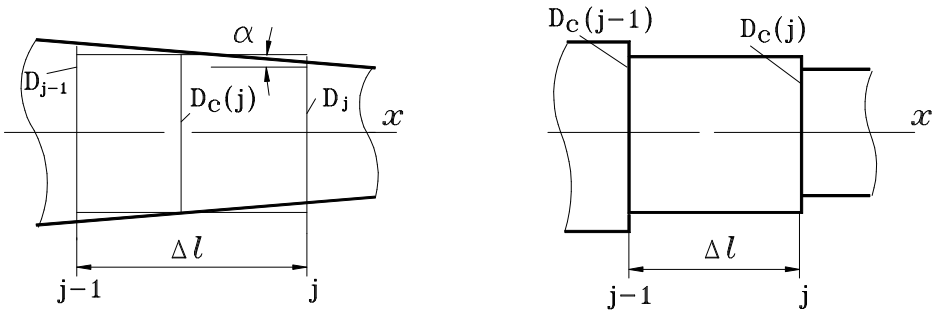


Рис. 2.36. Аппроксимация конического участка стержня цилиндрическим

Рассмотрим j-й участок конического стержня длиной Δl (рис. 2.36), ограниченный сечениями j-1 и j (D_{j-1} и D_j − диаметры соответствующих поперечных сечений конического участка).

Замена конического участка цилиндрическим участком длиной Δl при сохранении массы конического участка определяет диаметр цилиндрического участка $D_c(j)$

$$D_c(j) = \sqrt{D_{j-1}^2 - D_{j-1} 2 \cdot \Delta l \cdot tg\alpha + \frac{4}{3}(\Delta l \cdot tg\alpha)^2}, \quad j = 1,2,...,n .$$

Итак, конический стержень представлен n-м количеством цилиндрических участков малой длины, диаметр которых в пределах произвольного

j-го участка определяется приведенной выше формулой. Движение поперечных сечений на произвольном j-м участке опишем дифференциальным уравнением вида

$$\frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_j^2}\frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial t^2} = 0,\ x_{j-1} \le x \le x_j,\ j = 1,2,...,n_k, n_{k+1}\ ,$$

где $u_j(x_1 t)$ – продольное перемещение поперечного сечения вдоль оси x на j-ом участке стержня, a_j – скорость распространения волны деформации в материале j-го участка, x_{j-1} и x_j – координаты $j-1$-го и j-го поперечных сечений, ограничивающих j-й участок.

Начальные условия для участков, представляющих конический стержень,

$$\text{при } t = 0 \quad u_j(x,0) = 0,\ \frac{\partial u_j(x,0)}{\partial t} = V_0, \quad j = 1,2,..n\ .$$

Для участков, представляющих полуограниченный стержень, начальные условия имеют вид:

$$\text{при } t = 0 \quad u_j(x,0) = 0,\ \frac{\partial u_j(x,0)}{\partial t} = 0, \quad j = n+1, n+2,...,n_k.$$

Граничные условия характеризуют равенство перемещений сопряженных сечений и условия равновесия продольных сил на границе сопряженных участков:

$$u_j(x_{j,}t) = u_{j+1}(x_{j,}t),\ \ j = 1,2,...,n-1, n+1,..,n_k,$$

$$u_n(x_n,t) = u_{n+1}(x_n,t)\ ,\ \text{если}\ \frac{\partial u_n(x_n,t)}{\partial x} < 0;$$

$$-E_j A_j \frac{\partial u_j(x_j,t)}{\partial x} + E_j A_j \frac{\partial u_j(x_j,t)}{\partial x} = 0,\quad j = 1,2,..,n-1, n+1,..,n_k\ ,$$

$$-E_n A_n \frac{\partial u_n(x_n,t)}{\partial x} + E_{n+1} A_{n+1} \frac{\partial u_{n+1}(x_n,t)}{\partial x} = 0,\ \text{если}\ \frac{\partial u_n(x_n,t)}{\partial x} < 0;$$

$$\frac{\partial u_n(x_n,t)}{\partial x} = 0;\ \ \frac{\partial u_{n+1}(x_n,t)}{\partial x} = 0; \text{если}\ \frac{\partial u_n(x_n,t)}{\partial x} \ge 0\ ,$$

где $u_j(x_{j,}t)$, $u_{j+1}(x_{j,}t)$ – продольные перемещения сопряженных поперечных сечений j-го и $j+1$-го участков, положение которых определяется координатой x_j; E_j и E_{j+1} – модуль упругости материала стержня соответственно на j-ом и $j+1$-ом участках, $\frac{\partial u_j(o,t)}{\partial x}$ – продольная деформация на 1-ом участке стержня в сечении $x = 0$, $u_n(x_j,t)$ – продольное перемещение

ударного сечения стержня, положение которого определяется координатой x_n, $\dfrac{\partial u_n(x_n,t)}{\partial x}$ – продольная деформация в ударном сечении стержня.

2.6.5. *Волновая модель продольного удара по стержню с участком переменной жесткости и закрепленной сосредоточенной массой на торце*

На рис. 2.37 представлена схема продольного удара абсолютно твердого тела 1 по стержню 2 с закрепленной в сечении $x = l$ сосредоточенной массой 3. Абсолютно твердое тело 1 движется со скоростью V_0 и наносит удар по стержню 2. Стержень 2 до удара находится в состоянии покоя.

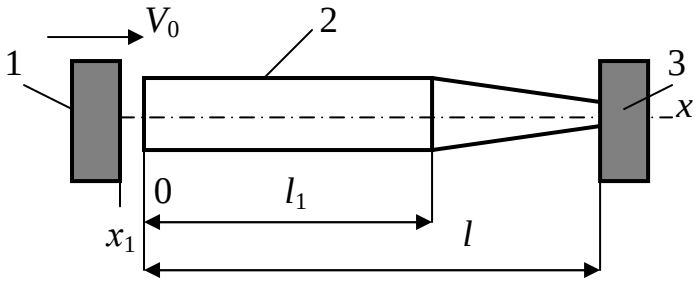


Рис. 2.37. Схема продольного удара по стержню с участком переменной жесткости и закрепленной массой на торце стержня

На торце стержня 2 в сечении $x = l$ закреплено абсолютно твердое тело 3. Стержень 2 имеет два участка: участок 1 ($0 \le x \le l_1$), на котором продольная жесткость поперечных сечений постоянна, и участок 2 ($l_1 \le x \le l$) с переменной продольной жесткостью поперечных сечений.

Движение поперечных сечений стержня 2 на участках 1 и 2 описывается волновыми уравнениями вида

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1^{\,2}}\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le x \le l_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[E_2 A_2 \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}\right] - \rho_2 A_2 \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad l_1 \le x \le l,$$

где $u_1(x,t)$ − продольное перемещение поперечных сечений стержня на участке 1; $u_2(x,t)$ − продольные перемещения поперечных сечений стержня на участке 2; x − координата сечения, t – время, a_1 – скорость распространения волны деформации в материале стержня на участке 1; a_2 – скорость распространения волны деформации в материале стержня на участке 2, l_1 − длина участка 1 стержня, l − длина стержня.

Начальные условия определяют состояние стержня 2 и абсолютно твердых тел 1 и 3 при $t = t_0 = 0$:

$$\dot{x}_1(0) = \frac{\partial u_1(0,t_0)}{\partial t} = V_0, \ \frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial t} = 0, \ \frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad 0 < x \le l_1,$$

$$\frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial t} = 0, \ \frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad l_1 \le x \le l.$$

Краевые условия определяют условия взаимодействия абсолютно твердых тел 1 и 3 со стержнем 2, а также условия сопряжения участков 1 и 2 стержня:

$$M_1 \cdot \frac{\partial^2 u_1(0,t)}{\partial t^2} = -E_1 A_1 \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x}, \quad \text{если} \ \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} < 0,$$

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \text{если} \ \dot{x}_1 < \frac{\partial u(0,t)}{\partial t},$$

$$-E_1 A_1 \frac{\partial u_1(l_1,t)}{\partial x} + E_2 A_2 \frac{\partial u_2(l_1,t)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u_1(l_1,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_2(l_1,t)}{\partial t}, \quad M_3 \cdot \frac{\partial^2 u_2(l,t)}{\partial t^2} = -E_2 A_2 \frac{\partial u_2(l,t)}{\partial x}.$$

2.6.6. *Волновая модель продольного удара гиперболического стержня об однородный полуограниченный стержень*

Волновая модель продольного удара гиперболического стержня об однородный полуограниченный стержень (модель Л. Т. Дворникова - А. А. Мясникова) описана в работах [58, 157, 158].

Схема ударной системы изображена на рис. 2.38. Гиперболический стержень 1 длиной l движется в направлении продольной оси x со скоростью V_0 и своим торцом в момент времени $t = 0$ наносит удар по неподвижному полуограниченному стержню 2.

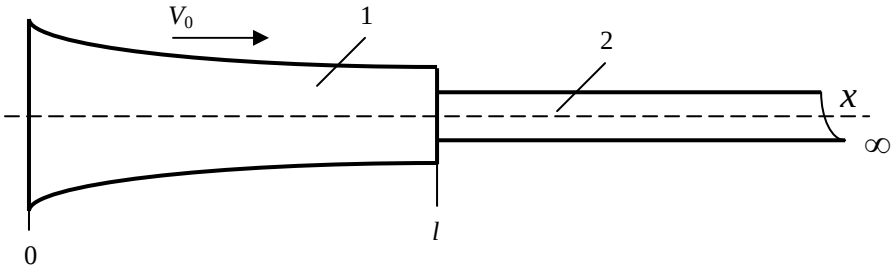


Рис. 2.38. Схема продольного удара гиперболического стержня о полуограниченный стержень

Уравнения движения соударяющихся стержней имеют вид

$$A_1(x) \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial A_1(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} - \frac{A_1(x)}{a_1^2} \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le x \le l,$$

$$A_2(x)\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial A_2(x)}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}-\frac{A_2(x)}{a_2{}^2}\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t^2}=0, \quad l\le x\le\infty.$$

Изменение диаметра гиперболического стержня описывается функцией

$$d(x)=\frac{D}{1+qx},$$

где D – диаметр неударного торца гиперболического стержня, $d(x)$– диаметр сечения, положение которого определяется координатой x; q – параметр, характеризующий кривизну гиперболической образующей.
Площадь поперечных сечений стержня 2 является постоянной.

Математически задача формулируется [153] следующим образом:
из системы дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}-\frac{2q}{1+qx}\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}-\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{a_2^2}\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2}=0;$$

с начальными условиями:

$$u_1(x,0)=0, \qquad u_2(x,0)=0, \qquad \frac{\partial u_1(x,0)}{\partial t}=V_0, \qquad \frac{\partial u_2(x,0)}{\partial t}=0;$$

и граничными условиями: $\dfrac{\partial u_1(0,t)}{\partial x}=0, \qquad u_1(l,t)=u_2(l,t),$

$$E_1A_1\frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x}=E_2A_2\frac{\partial u_2(l,t)}{\partial x}, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}=0$$

определить функцию, определяющую продольную деформацию в поперечных сечениях полуограниченного стержня:

$$\varepsilon_2(x,t)=\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}.$$

2.6.7. *Волновая модель продольного удара параболического стержня об однородный полуограниченный стержень*

Волновая модель продольного удара параболического стержня об однородный полуограниченный стержень описана в работах [21]. Схема ударной системы изображена на рис. 2.39.

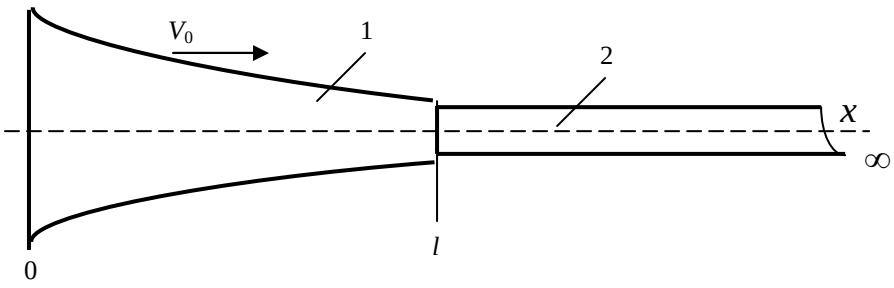


Рис. 2.39. Схема продольного удара параболического стержня о полуограниченный стержень

Параболический стержень 1 длиной l движется в направлении продольной оси x со скоростью V_0 и своим торцом в момент времени $t = 0$ наносит удар по неподвижному полуограниченному стержню 2.

Уравнения движения соударяющихся стержней имеют вид

$$A_1(x)\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial A_1(x)}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} - \frac{A_1(x)}{a_1^{\,2}}\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le x \le l,$$

$$A_2(x)\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial A_2(x)}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x} - \frac{A_2(x)}{a_2^{\,2}}\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad l \le x \le \infty.$$

Изменение диаметра параболического стержня описывается функцией

$$D = D_0 - q_p \cdot x^2, \quad q_p = \frac{D_0 - D_L}{l^2},$$

где q_p – параметр параболы, D_0 – диаметр стержня 1 при x = 0, D_L – диаметр стержня 1 при $x = l$.

Начальные условия для параболического стержня:

$$\text{при } t = 0 \qquad u_1(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u_1(x,0)}{\partial t} = V_0.$$

Начальные условия для полуограниченного стержня 2:

$$\text{при } t = 0 \qquad u_2(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u_2(x,0)}{\partial t} = 0.$$

Граничные условия характеризуют отсутствие деформаций в начальном сечении $x = 0$ стержня 1 $\dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} = 0$, совместные перемещения ударных сечений $x = l$ стержней при их взаимодействии

$$\frac{\partial u_1(l,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_2(l,t)}{\partial t}, \qquad \text{если} \quad \frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x} < 0,$$

равенство продольных сил в ударных сечениях соударяющихся стержней при их взаимодействии

$$E_1 A_1 \frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x} = E_2 A_2 \frac{\partial u_2(l,t)}{\partial x}, \qquad \text{если} \quad \frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x} < 0,$$

отсутствие деформаций в бесконечно удаленном сечении $x = \infty$ 2-го стержня

$$\frac{\partial u_2(\infty,t)}{\partial x} = 0.$$

Если условие взаимодействия ударных сечений соударяющихся стержней не выполняется, т. е. $\frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x} \geq 0,$ то граничные условия принимают вид:

$$\frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_2(l,t)}{\partial x} = 0, \quad \text{если } u_1(l,t) \leq u_2(l,t).$$

2.6.8. *Волновая модель продольного удара экспоненциального стержня об однородный полуограниченный стержень*

Схема ударной системы изображена на рис. 2.40.

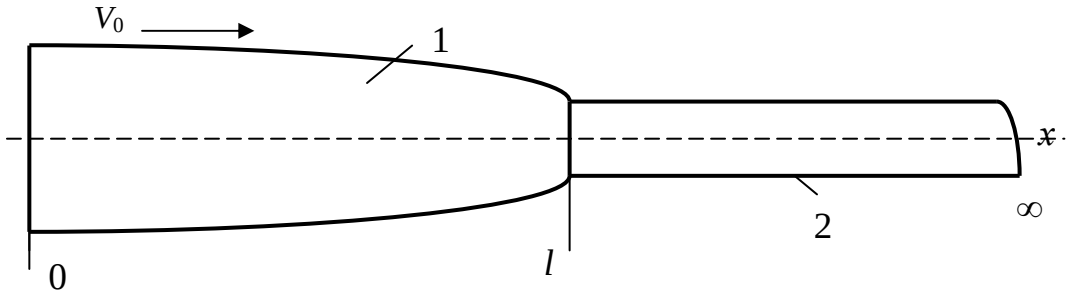


Рис. 2.40. Схема продольного удара экспоненциального стержня

Экспоненциальный стержень 1 длиной l движется в направлении продольной оси x со скоростью V_0 и своим торцом в момент времени $t = 0$ наносит удар по неподвижному полуограниченному стержню 2.

Уравнения движения соударяющихся стержней имеют вид

$$A_1(x)\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial A_1(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} - \frac{A_1(x)}{a_1^{\,2}} \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$A_2(x)\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial A_2(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x} - \frac{A_2(x)}{a_2^{\,2}} \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad l \leq x \leq \infty.$$

Изменение диаметра экспоненциального стержня описывается функцией

$$D = D_0 \cdot e^{-q_1 x}, \quad q_1 = -\frac{1}{l}\ln\frac{D_L}{D_0},$$

где q_1 – параметр экспоненты, D_0 – диаметр стержня 1 при $x = 0$, D_L – диаметр стержня 1 при $x = l$.

Начальные условия для экспоненциального стержня:

$$\text{при } t = 0 \qquad u_1(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u_1(x,0)}{\partial t} = V_0.$$

Начальные условия для полуограниченного стержня 2:

$$\text{при } t = 0 \qquad u_2(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u_2(x,0)}{\partial t} = 0.$$

Граничные условия характеризуют отсутствие деформаций в начальном сечении $x = 0$ стержня 1

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} = 0,$$

совместные перемещения ударных сечений $x = l$ стержней при их взаимодействии

$$\frac{\partial u_1(l,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_2(l,t)}{\partial t}, \qquad \text{если } \frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x} < 0,$$

равенство продольных сил в ударных сечениях соударяющихся стержней при их взаимодействии

$$E_1 A_1 \frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x} = E_2 A_2 \frac{\partial u_2(l,t)}{\partial x}, \qquad \text{если } \frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x} < 0,$$

отсутствие деформаций в бесконечно удаленном сечении $x = \infty$ 2-го стержня

$$\frac{\partial u_2(\infty,t)}{\partial x} = 0.$$

Если условие взаимодействия ударных сечений соударяющихся стержней не выполняется, т. е. $\frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x} \geq 0,$ то граничные условия принимают вид:

$$\frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_2(l,t)}{\partial x} = 0, \quad \text{если } u_1(l,t) \leq u_2(l,t).$$

2.6.9. *Волновая модель продольного удара полукатеноидального стержня об однородный полуограниченный стержень*

Модель продольного удара полукатеноидального стержня об однородный полуограниченный стержень (модель Дворникова Л. Т. - Жукова И. А.) описана в работе [70]. Схема продольного удара полукатеноидального стержня изображена на рис. 2.41.

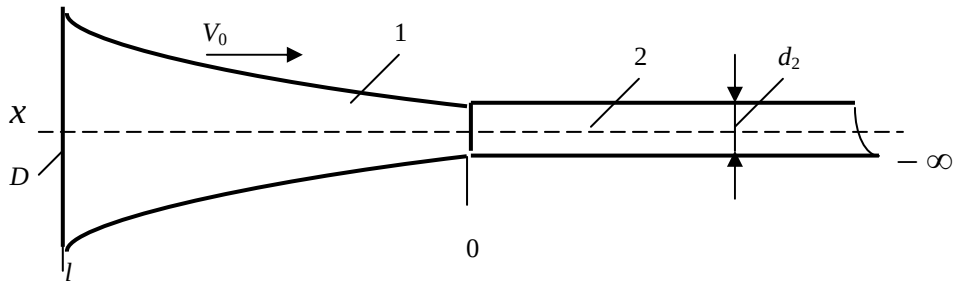


Рис. 2.41. Схема продольного удара полукатеноидального стержня об однородный полуограниченный стержень

Образующая катеноидальной поверхности представляет катену – кривую с переменной кривизной. Катена – есть график функции гиперболического косинуса, если отрезок $a_к$ принять за единицу масштаба. Радиус кривизны катены определяется как

$$R = \frac{a_k}{4}\left(e^{\frac{x}{a_k}} + e^{-\frac{x}{a_k}}\right)^2, \quad a_k = \frac{d_2}{2} - \text{параметр катены}, \; d_2 - \text{диаметр стержня 2.}$$

Уравнения движения соударяющихся стержней имеют вид

$$A_1(x)\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial A_1(x)}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} - \frac{A_1(x)}{a_1{}^2}\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le x \le l,$$

$$A_2(x)\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial A_2(x)}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x} - \frac{A_2(x)}{a_2{}^2}\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le x \le -\infty.$$

Так как

$$A_1(x) = \pi a_k^2 \operatorname{ch}^2\frac{x}{a_k}, \qquad A_2(x) = \pi a_k^2 = \text{const},$$

$$\frac{1}{A_1(x)}\cdot\frac{\partial A_1(x)}{\partial x} = \frac{2}{a_k}\operatorname{th}\frac{x}{a_k}, \qquad \frac{\partial A_2(x)}{\partial x} = 0,$$

уравнения движения примут вид

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}+\frac{2}{a_k}\operatorname{th}\frac{x}{a_k}\cdot\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}-\frac{1}{a_1{}^2}\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t^2}=0,\quad 0\le x\le l,$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{a_2{}^2}\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t^2}=0,\quad 0\le x\le -\infty.$$

Начальные условия для полукатеноидального стержня:

$$\text{при } t=0 \qquad u_1(x,0)=0,\quad \frac{\partial u_1(x,0)}{\partial t}=V_0.$$

Начальные условия для полуограниченного стержня 2:

$$\text{при } t=0 \qquad u_2(x,0)=0,\quad \frac{\partial u_2(x,0)}{\partial t}=0.$$

Граничные условия характеризуют отсутствие деформаций в начальном сечении $x=0$ стержня 1

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}=0,$$

совместные перемещения ударных сечений $x=l$ стержней при их взаимодействии

$$\frac{\partial u_1(l,t)}{\partial t}=\frac{\partial u_2(l,t)}{\partial t},\qquad \text{если } \frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x}<0,$$

равенство продольных сил в ударных сечениях соударяющихся стержней при их взаимодействии

$$E_1A_1\frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x}=E_2A_2\frac{\partial u_2(l,t)}{\partial x},\qquad \text{если } \frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x}<0,$$

отсутствие деформаций в бесконечно удаленном сечении $x=\infty$ 2-го стержня

$$\frac{\partial u_2(\infty,t)}{\partial x}=0.$$

Если условие взаимодействия ударных сечений соударяющихся стержней не выполняется, т. е. $\frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x}\ge 0,$ то граничные условия принимают вид:

$$\frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u_2(l,t)}{\partial x}=0,\quad \text{если } u_1(l,t)\le u_2(l,t).$$

2.7. Волновая модель продольного удара при взаимодействии стержня с технологической средой или объектом

Схема продольного удара по стержню, взаимодействующему в сечении $x = l$ с технологической средой, представлена на рис. 2.42. Тело 1 массой M движется вдоль оси x со скоростью V_0 и в момент времени $t = 0$ наносит удар по стержню 2, взаимодействующему с технологической средой 3.

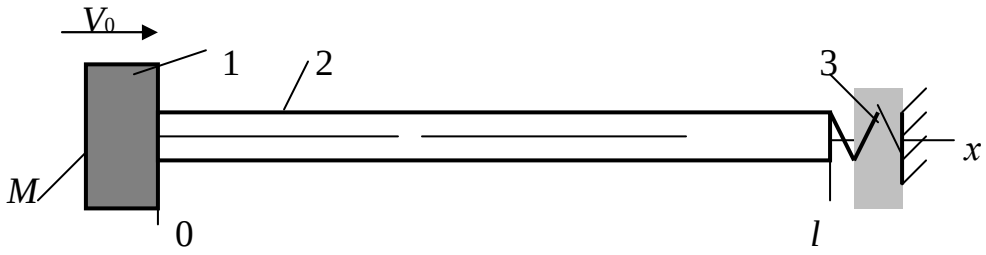


Рис. 2.42. Схема продольного удара по стержню, взаимодействующему со средой

Движение поперечных сечений стержня описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 \le x \le l,$$

где a – скорость распространения упругой волны в материале стержня.

Начальные условия при $t = 0$:

$$u(x,0) = 0,$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \begin{cases} V_0, & x = 0, \\ 0, & 0 < x \le l \end{cases}.$$

Граничные условия: если $x = 0$, $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} < 0$,

$$M\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} = EA\frac{\partial u(0,t)}{\partial x},$$

$$V_M = \frac{\partial u(0,t)}{\partial t}, \qquad x_M = u(0,t),$$

если $x_м \le u(0,t)$

$$\frac{\partial u(o,t)}{\partial x} = 0, \quad v_м = const, \quad x_м = x_м(t_*) + v_м(t - t_*),$$

при $x = l$ $\quad u(l,t) = 0, \quad \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial t} = 0,$

где E – модуль упругости 1-го рода материала стержня, A – площадь поперечного сечения; $x_м$ – координата, определяющая положение ударной массы M; $v_м$ – скорость ударной массы; t_* – время, когда произойдет отрыв ударной массы М от ударного сечения.

Граничные условия для сечения $x = l$ определяют характер взаимодействия стержня с технологической средой. Если среда представляется как упругопластический элемент, то граничные условия примут вид

$$EA\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = k \cdot u(l,t), \quad \text{если } \frac{\partial u(l,t)}{\partial t} \geq 0,$$

$$EA\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \quad \text{если } \frac{\partial u(l,t)}{\partial t} < 0,$$

где $к$ − жесткость упругопластического элемента, когда $\frac{\partial u(l,t)}{\partial t} \geq 0$.

2.7.1. *Модель взаимодействия волны деформации с технологическим объектом или средой*

Модель взаимодействия волны деформации с технологическим объектом или средой описана в работах [14, 17, 19]. Рассмотрим модель, предложенную Алимовым О. Д., Дворниковым Л. Т., Шапошниковым И. Д. в работе [14].

Расчетная схема представлена на рис. 2.43 в момент, когда волна деформации, движущаяся по стержню I, подошла к упругому элементу 2.

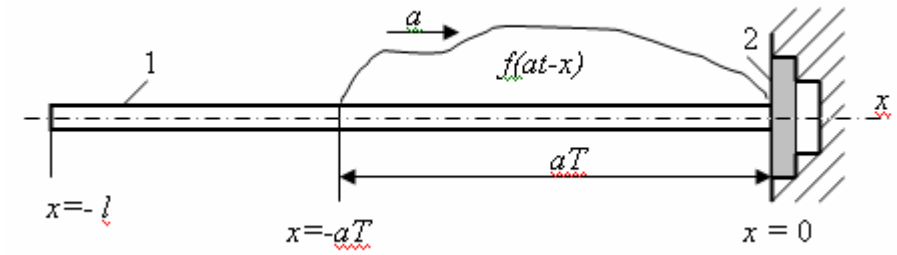


Рис. 2.43. Расчетная схема взаимодействия волнового импульса с пружиной.

В качестве исходной [14] принята волна деформации, определяемая некоторой функцией $f(at - x)$. Причем

$$f(at - x) = \frac{a}{EA}\int_0^{t-\frac{x}{a}} P(z)dz,$$

где A – площадь сечения, z – произвольная переменная.

Функция $P(t)$ имеет ненулевое значение только при изменении ее аргумента в интервале $0 < t < T$. Тогда аргумент функции $f(at - x)$ изменяется в интервале $0 < at - x < aT$.

Значение жесткости упругого элемента определяется [14] коэффициентом

$$k = \frac{P}{h} = const,$$

где P – сила давления стержня на упругий элемент, h – прогиб.

Для определения начальных условий за момент $t = 0$ принят момент подхода переднего фронта волны $f(at - x)$ к упругой заделке. Согласно расчетной схеме сечения стержня могут иметь координаты только в интервале $-1 < x < 0$. Кроме того, предполагается, что стержень предварительно не напряжен.

Начальные условия, соответствующие параметрам волны $f(at - x)$, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} u(x,t)\big|_{t=0} &= f(-x), \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} &= af'(-x), \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &0 < -x < aT, \\ &-aT < x < 0. \end{aligned}$$

Первое из уравнений на участке $-aT < x < 0$ дает распределение смещения сечений, захваченных волной. Второе уравнение дает распределение скоростей сечений на этом же участке.

Для случая $1 > aT$, который мы рассмотрим, отражение волны от свободного конца $x = -1$ (каковым он окажется в момент окончания «отдачи» горной породы) не успеет повлиять на взаимодействие волны $f(at - x)$ с упругой заделкой. Поэтому учитывается [14] только одно граничное условие в сечении $x = 0$: равенство нулю суммы сил взаимодействия, стержня с упругой заделкой

$$EF\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0} + ku(x,t)\big|_{x=0} = 0, \quad \text{где } u(x,t)\big|_{x=0} = h.$$

2.7.2. *Модель продольного удара по свае при взаимодействии ее с технологической средой*

Модель продольного удара по свае при взаимодействии ее с технологической средой описана в многочисленных работах [48, 49, 51, 95, 107, 160]. Рассмотрим модель, предложенную Мавриным А. И. [107].

Волновая теория продольного удара Сен-Венана-Буссинеска в связи с ударным погружением свай впервые была применена Н. М. Герсевановым [51], а позднее и другими авторами (В. В. Кречмером, А. А. Каншиным и

А. С. Плуталовым). Однако в указанных работах, как отмечает автор [107], не учитывается возможность упругих деформаций грунта.

При движении сваи внутрь грунта преодолеваются силы сопротивления грунта, распределенные по боковой поверхности и по острию сваи. Механизм этих сопротивлений характеризуется посредством известной диаграммы Прандтля, выражающей закон малых упруго-пластических деформаций идеального материала. Движение сваи из нейтрального положения начинается с упругого оседания, и лишь после достижения критического смещения происходит «срыв», т. е. необратимая осадка сваи.

Считается установленным, что упругое сопротивление грунта проявляется в основном у острия сваи, упругое же сопротивление, действующее по боковой поверхности, мало, и им при решении практических задач, по мнению автора [107], можно пренебречь.

Учитывая приведенные допущения, автор [107] предлагает процесс упругого оседания сваи при ударном погружении рассматривать следующим образом. Абсолютно жесткий молот (рис. 2.44) ударяет о левый конец упругой сваи. Другим концом свая через пружину опирается на полозья, удерживаемые силой трения.

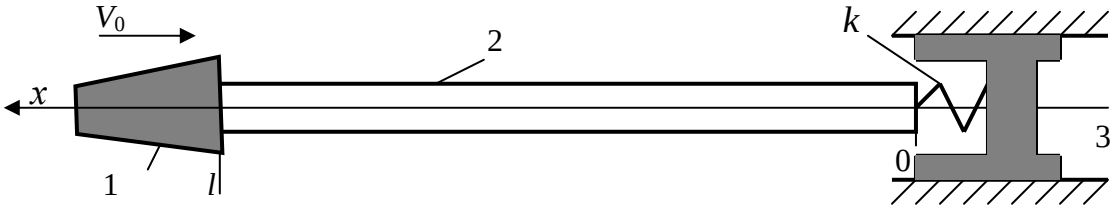


Рис.2.44. Схема продольного удара по свае, взаимодействующей со средой (модель Маврина А. И.) [107]

При ударном погружении свай продолжительность соударения молота и сваи мала и исчисляется тысячными долями секунды, поэтому погрешность, вызванная пренебрежением вязким сопротивлением грунта и внутренним сопротивлением материала сваи, предполагается [107] незначительной.

Продольные колебания сваи описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

где u – перемещение сечения с абсциссой x; t – время; a – скорость распространения деформаций в материале сваи.

Условия на концах сваи имеют вид:

при $x = 0$ $\quad EA\dfrac{\partial u}{\partial x} = ku$; при $x = l$ $\quad EA\dfrac{\partial u}{\partial x} = -M\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, если $\dfrac{\partial u}{\partial x} < 0$.

Здесь E – модуль упругости материала сваи; A – площадь поперечного сечения сваи; l – длина сваи; k – жесткость пружины, имитирующей упругость грунта; M – масса молота.

Полагая, что начало отсчета времени совпадает с началом удара молота о сваю, имеем следующие начальные условия:

при $t = 0 \quad u = 0; \ \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad 0 < x < l;$ при $t = 0 \quad \dfrac{\partial u}{\partial t} = -v_0 \quad (x = l)$.

Здесь v_0 – скорость молота в момент удара.

2.7.3. *Модели характеристик сопротивления технологической среды типа «горная порода» внедрению инструмента*

Одной из важнейших характеристик процесса внедрения инструмента в обрабатываемую среду является зависимость силы сопротивления среды от величины внедрения в нее инструмента, т. е. характеристика «сила-внедрение». Для технологической среды типа «горная порода» модели характеристик «сила-внедрение» рассмотрены в работах [8, 10, 12, 15, 16, 19, 29 – 32, 36, 37, 59, 60, 66, 78, 80, 97, 98, 100 – 102, 104, 105, 167, 172, 192, 204, 215, 221, 222 – 224]. Приведем ниже результаты обобщения, выполненные в [19].

На рис. 2.45 представлены графики зависимостей «сила-внедрение», полученные в работах О. Д. Алимова [15], Л. А. Шрейнера [220], Р. Саймона [224] и В. А. Хуструлида [222] при внедрении инструментов различной конфигурации в хрупкие породы.

Диаграмма, показанная на рис. 2.45, а, построена [220] при статическом вдавливании в гранит цилиндрического штампа площадью 2 мм^2. Как видно из рисунка, при увеличении силы P глубина внедрения x до разрушения растет практически по линейному закону.

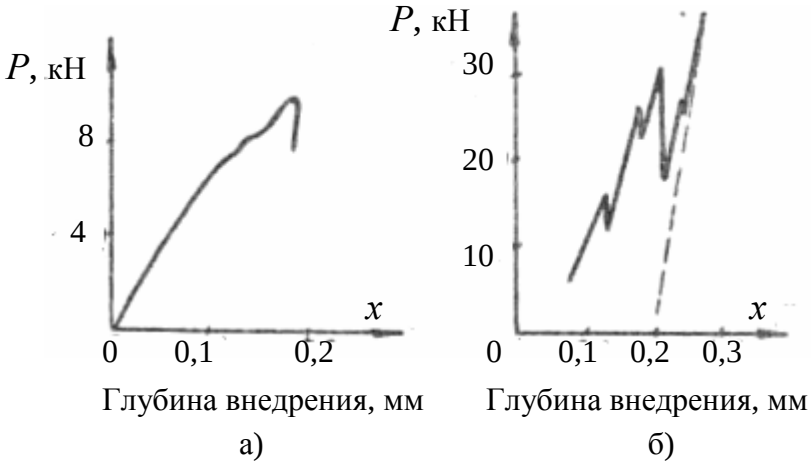


Рис. 2.45. Диаграммы, характеризующие изменение силы сопротивления технологической среды (горной породы) при внедрении в нее инструмента: а) при статическом вдавливании в гранит цилиндрического штампа [220]; б) при статическом вдавливании в сиенито-диорит долотчатой коронки [15]

Зависимость, представленная на рис. 2.45, б, получена при вдавливании в сиенито-диорит долотчатого инструмента диаметром 42 мм с углом приострения лезвия 110° [15].

Особенностью процесса внедрения инструмента в хрупкую породу является наличие скачков силы внедрения, которые объясняются хрупким выкалыванием частиц породы (рис. 2.46).

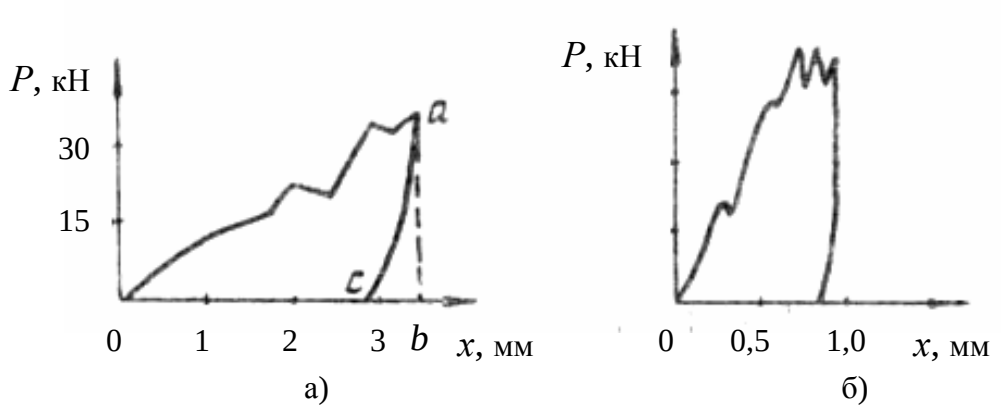


Рис. 2.46. Диаграммы, характеризующие изменение силы сопротивления технологической среды (горной породы) при внедрении в нее инструмента: а) при ударном внедрении в гранит долотчатой коронки [224]; б) при ударном внедрении в гранит четырехперой коронки [222]

Графики зависимостей «сила-внедрение», полученные при ударном внедрении в гранит долотчатой (рис. 2.46, а [224]) и четырехперой (рис. 2.46, б [222]) коронок, имеют аналогичный вид.

Для них характерны почти линейный рост силы сопротивления породы внедрению по мере углубления инструмента, сопровождающегося раздавливанием зерен породы под лезвием инструмента, и возникновение на определенной стадии хрупкого выкалывания породы и соответствующих ему скачкообразных изменений характеристики «сила-внедрение».

При достижении максимального значения усилия в контакте инструмента с породой (точка «*a*» на рис. 2.46, а) разрушение породы прекращается и при снятии нагрузки происходит частичное упругое восстановление породы (отрезок *ac*). Вследствие этого остаточная глубина внедрения (отрезок 0*c*) меньше максимального достигнутого внедрения «0*b*» на величину отпора инструмента породой «*bc*».

В работах В. Д. Андреева, К. И. Иванова[78, 80] и В. Б. Соколинского [194] экспериментально установлено, что вид характеристики «сила-внедрение» зависит не только от свойств породы и геометрии инструмента, но и от длительности и амплитуды ударного импульса, под действием которого происходит внедрение.

На рис. 2.47 представлены диаграммы «сила-внедрение», полученные при внедрении инструментов в гранит (а) [200] и кварцит (б) [78]. Диаграммы, приведенные на рис. 2.47, а, получены при воздействий на породу импульсов

различной амплитуды, что достигалось путем изменения скорости удара бойком по инструменту.

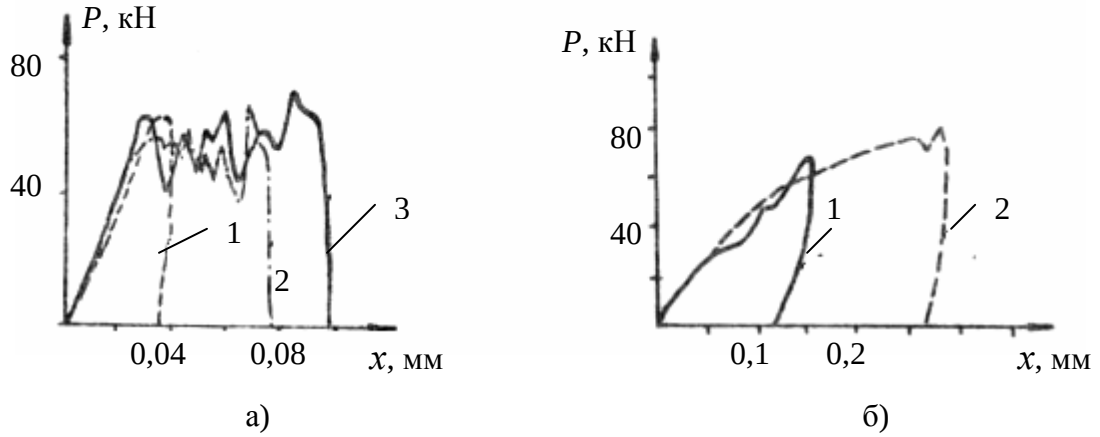


Рис. 2.47. Влияние амплитуды ударного импульса на процесс внедрения: а) внедрение в гранит бирадиального индентора [200] (1 – предударная скорость бойка 2 м/с; 2 – предударная скорость бойка 1,8 м/с; 3 – предударная скорость бойка 3,4 м/с); б) внедрение в кварцит долотчатой коронки под действием ударного импульса различной длительности [78] (1 – длина бойка l = 250 мм, 2 – длина бойка l = 570 мм)

Из рисунка 2.47, а видно, что при меньшем значении амплитуды импульса форма диаграммы $P(x)$ близка к треугольной (график 1), при достижении же усилием в контакте инструмента с породой некоторого уровня характер взаимодействия изменяется, что проявляется в уменьшении угла наклона характеристики $P(x)$ к оси x (графики 2, 3).

Это означает, что внедрение инструмента продолжается без значительного роста сил сопротивления породы. Аналогичный характер имеют диаграммы, полученные при воздействии на породу прямоугольными импульсами различной длительности, но одинаковой амплитуды [78]. Длительность импульсов в этих опытах варьировалась за счет изменения длины бойка, ударяющем по инструменту.

На основе обобщения экспериментальных данных различных исследователей в работе А. Ф. Лисовского и Л. Т. Дворникова [105] предложена приближенная модель (рис. 2.48, а) зависимости «сила-внедрение» для хрупких горных пород и применяемых в практике бурения скоростей удара.

В данной модели сопротивление породы внедрению инструмента описывается зависимостью

$$P(x) = kx,$$

где $P(x)$ – сила сопротивления породы, x – величина внедрения инструмента, k – коэффициент жесткости системы «инструмент-порода».

Прямая «*оа*» на рис. 2.48, а изображает необратимый процесс, т. е. внедрение инструмента может происходить до любой точки прямой «*оа*» и общая глубина внедрения определяется лишь максимальным усилием, развиваемым в контакте инструмента с породой. При уменьшении усилия в контакте достиг-

нутая величина внедрения сохраняется и упругий отпор инструмента породой не учитывается.

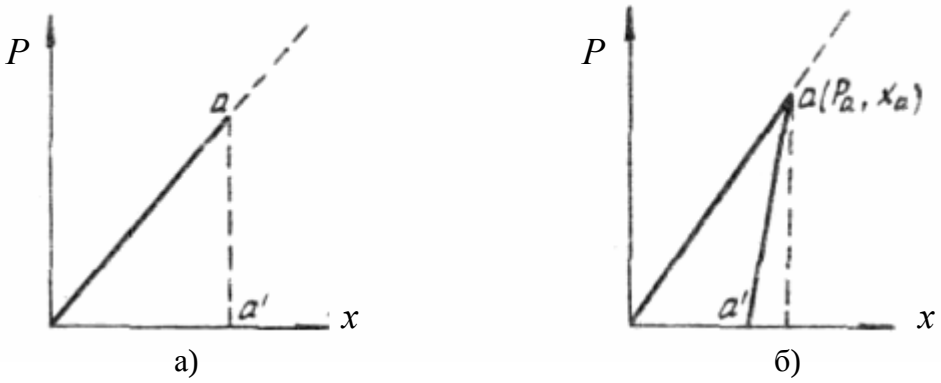


Рис. 2.48 Модели взаимодействия инструмента с горной породой:
а) модель А. Ф. Лисовского - Л. Т. Дворникова [105];
б) модель Соколинского В. Б. [200], Хуструлида В. [222]

На рис. 2.48, б представлена еще одна модель зависимости «сила-внедрение», предложенная в работах В. Б.Соколинокого [200], Б. Лундберга [223], В. А. Хуструлида [222]. Отличие данной модели от предыдущей в том, что она предполагает учет упругого восстановления породы после окончания внедрения. Линия упругого отпора *aa*' описывается при этом уравнением

$$P = k_e(x - x_a) + P_a,$$

где k_e – коэффициент наклона линии, соответствующей упругому отпору; P_a, x_a – соответственно максимальные значения усилия и глубины внедрения.

Следует отметить, что рассмотренные модели предложены для описания взаимодействия инструмента лишь с породами, характеризуемыми высокой твердостью и хрупкостью, и в случае относительно сложной формы характеристики $P(x)$ могут использоваться только как первое приближение. В этом плане более универсальной является модель, представленная на рис. 2.49 [200].

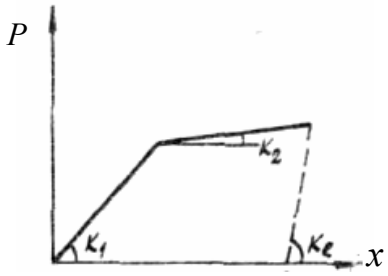


Рис. 2.49. Кусочно-линейная модель взаимодействия инструмента с горной породой Соколинского В. Б. [200]

Характеристика $P(x)$ в этом случае представляется в виде четырехугольника, углы наклона сторон которого к оси абсцисс определяются жест-

костями контакта «инструмент-порода» на разных этапах процесса внедрения.

Примеры зависимостей «сила-внедрение», полученных в работах Н. Н. Павловой [167], И. Г. Шелковникова [219], Л. А. Шрейнера [220] и В. А. Хуструлида [222] при внедрении различных инструментов в пластично-хрупкие породы, приведены на рис. 2.50, 2.51.

На рис. 2.50 представлены графики зависимостей «сила-внедрение», полученные при статическом вдавливании цилиндрического штампа в мрамор и известняк [220] и четырехперой коронки в мрамор [222].

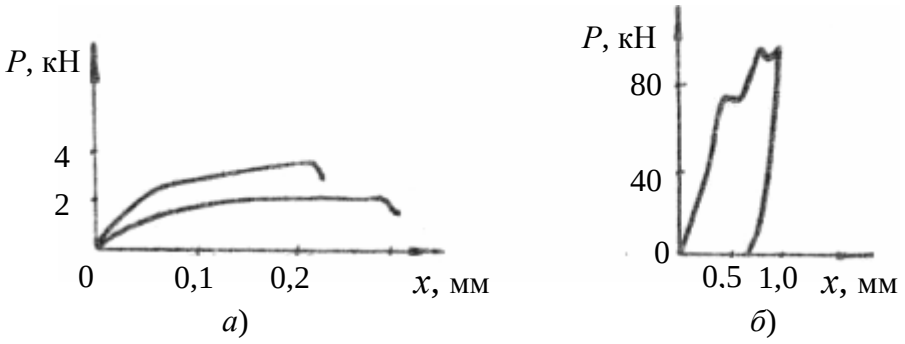


Рис. 2.50. Диаграммы «сила-внедрение», характеризующие процесс статического вдавливания инструмента в пластично-хрупкие породы:
а) статическое вдавливание цилиндрического штампа в мрамор и известняк [220];
б) статическое вдавливание четырехперой коронки в мрамор [222]

Как видно из рисунка, в начальной стадии внедрения графики $P(x)$ для пластично-хрупких пород характеризуются относительно крутым подъемом, затем при достижении усилием внедрения некоторого предела глубина внедрения начинает расти более интенсивнее что характеризуется «выполаживанием» кривых на диаграммах. При этом [222] интенсивность выкалывания породы значительно ниже, чем при внедрении инструмента в хрупкие породы. После прекращения внедрения и снятия нагрузки происходит частичное упругое восстановление породы (рис. 2.50, б).

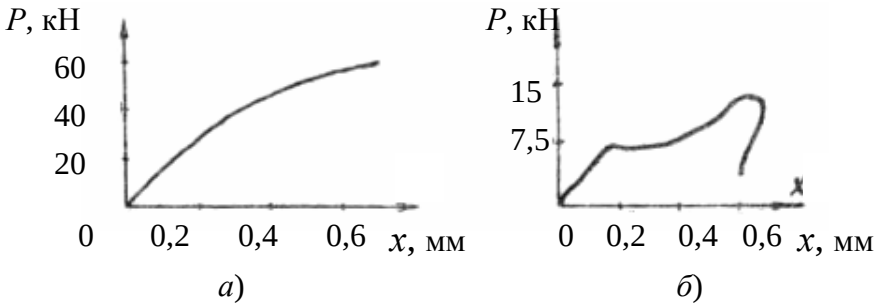


Рис.2.51. Диаграммы «сила-внедрение», характеризующие процесс динамического внедрения инструмента в пластично-хрупкие породы:
а) динамическое внедрение цилиндрического штампа в мрамор [167];
б) динамическое внедрение сферического штампа в песчаник [219]

Аналогичный характер имеют графики зависимостей «сила- внедрение», полученные при ударном внедрении цилиндрического штампа в мрамор [167] и сферического наконечника в песчаник [219] (рис. 2.51, а, б).

В качестве приближенной модели «сила-внедрение» для пород, обладающих упруго-пластическими свойствами, в работе [105] предложена модель в виде ломаной прямой (рис. 2.52), угол наклона отрезков которой к оси абсцисс монотонно убывает.

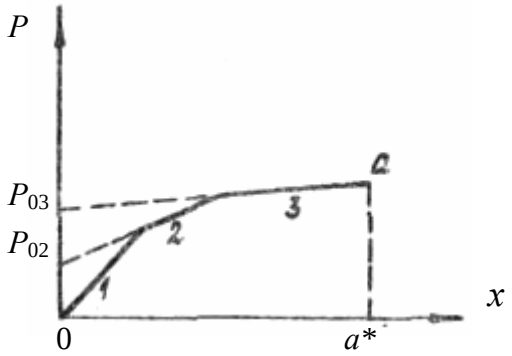


Рис. 2.52. Обобщенная модель взаимодействия инструмента с пластично-хрупкой горной породой (модель Дворникова Л. Т. - Лисовского А. Ф. [105])

В работах [222, 223] предложена модель зависимости «сила-внедрение», вид которой показан на рис. 2.53. В [222] отмечается, что данная модель характерна для пород, которые разрушаются как скалыванием, так и дроблением (раздавливанием).

Упругая деформация и раздавливание породы изображаются линиями с положительным наклоном к оси абсцисс, а области формирования выкалывания – линиями с отрицательным наклоном. Если нагрузка на инструменте постепенно увеличивается от 0 до P_a, то характеристика $P(x)$ изображается ломаной линией *оа*. При снятии нагрузки происходит упругое восстановление породы (линия *аа'*). Если нагрузку приложить вновь, то первоначальная глубина внедрения восстанавливается по линии *аа'*, после чего внедрение продолжается по линии *ав*.

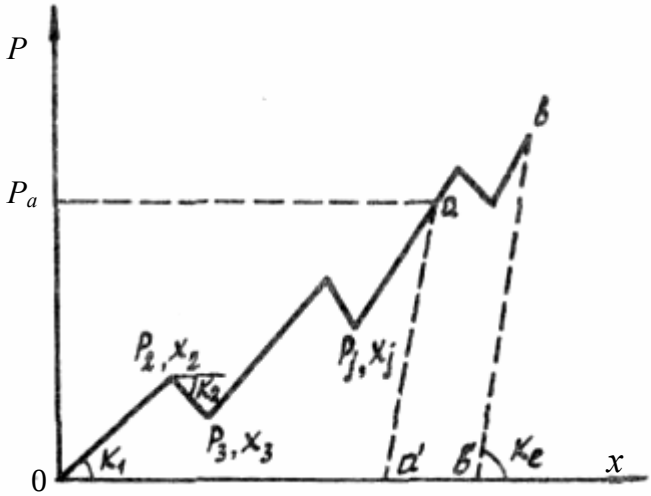


Рис. 2.53. Обобщенная модель взаимодействия инструмента с пластично-хрупкой горной породой (модель Хуструлида [222])

Данная модель, как отмечается в [212], позволяет аппроксимировать любую действительную зависимость «сила-внедрение» с требуемой точностью некоторым числом отрезков прямых, причем для адекватного, изображения обычно достаточно не более восьми отрезков. Математически данная модель может быть записана в виде

$$P = P_j + k_J (x - x_j),$$

где j – номер соответствующего отрезка характеристики; k – коэффициент жесткости системы инструмент-порода.

Наклон к оси абсцисс линий *аа'*, *вв'*, по которым происходит упругое восстановление породы, характеризуется коэффициентом k_e.

Рассмотренные модели характеристик «сила-внедрение» позволяют с тем или иным приближением аппроксимировать реальные процессы внедрения инструмента как в хрупкие, так и в пластично-хрупкие горные породы. Следует отметить, что при разработке алгоритма расчета параметров взаимодействия инструмента с породой под действием ударных импульсов целесообразно задаваться моделью, позволяющей наиболее полно учитывать особенности процесса внедрения различных инструментов в породы с разными физическими свойствами.

В качестве такой модели, как отмечено в работе [19], может быть принята модель, представленная на рис. 2.53, которая позволяет приближенно учитывать образование выколов породы под инструментом и упругий отпор инструмента породой после снятия нагрузки.

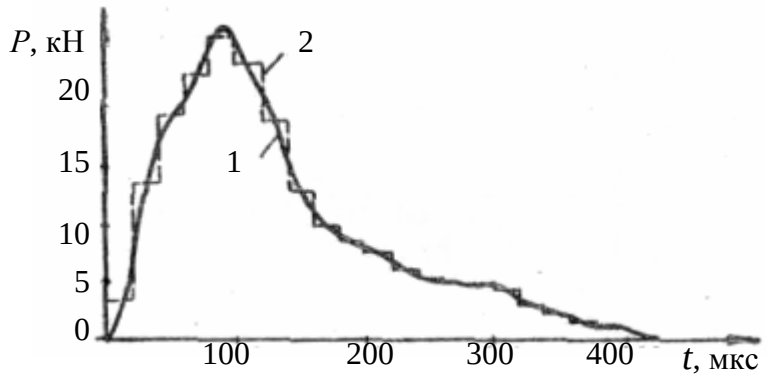


Рис. 2.54. Экспериментальная осциллограмма [222] ударного импульса (диаграмма 1) и ее аппроксимация ступенчатой диаграммой (диаграмма 2)

В работе [222] приведены экспериментальные осциллограммы ударного импульса, воздействующего на забой (рис. 2.54), и импульса, отраженного от забоя (рис. 2.55), изменения усилия в контакте «инструмент-порода» (рис. 2.56) и диаграмма «внедрение-время» (рис. 2.56), полученные при внедрении в известняк долотчатой коронки диаметром 25,7 мм.

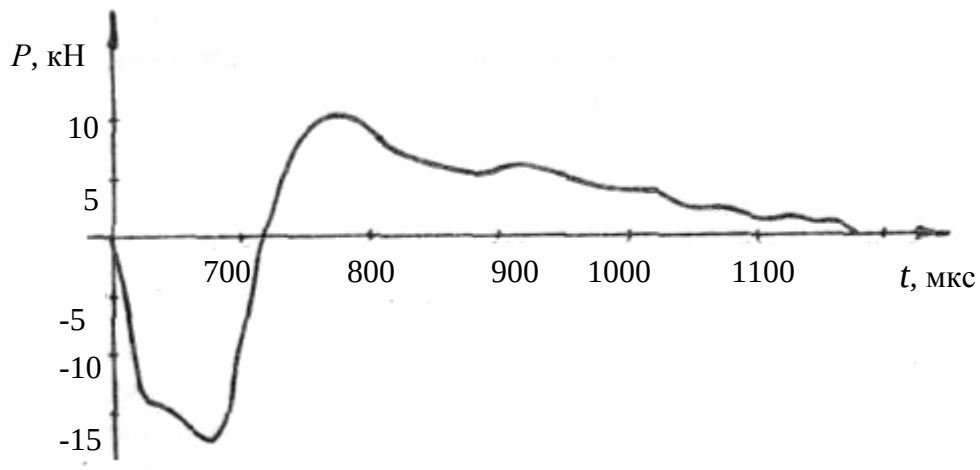


Рис. 2.55. Экспериментальная осциллограмма отраженного от горной породы ударного импульса [222]

Выше отмечалось, что характер процесса внедрения инструмента в породу определяется не только свойствами породы и геометрией породоразрушающего инструмента, но и параметрами ударного импульса, воздействующего на инструмент. Формы ударных импульсов, генерируемых в волноводах машин ударного действия, могут быть весьма сложными, что затрудняет их математическое описание.

Рядом исследователей рассматривалось аналитически воздействие на горную породу ударных импульсов относительно простой геометрической формы (прямоугольной, треугольной и т. д.), однако аналитического решения для импульса произвольной формы не имеется.

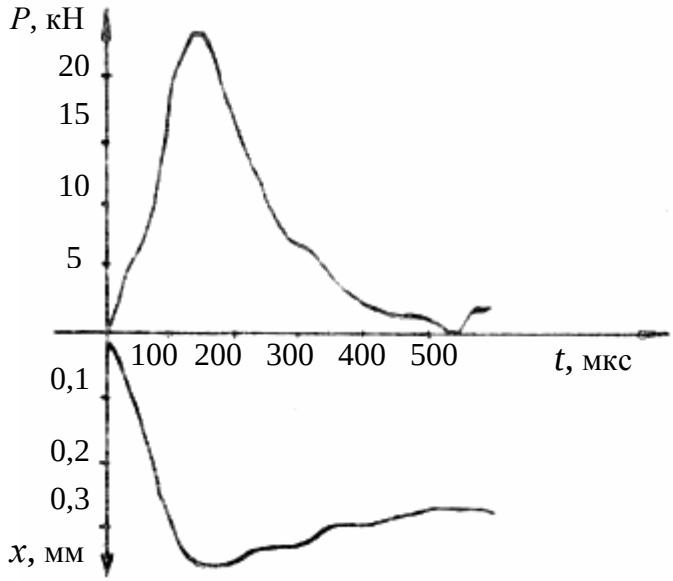


Рис. 2.56. Экспериментальные осциллограммы, характеризующие изменение силы взаимодействия инструмента с горной породой (верхняя диаграмма)и величины внедрения инструмента в горную породу (нижняя диаграмма) в зависимости от времени

На рис. 2.57 представлена модель «сила-внедрение» [19], построенная на основе зависимостей $P_k(t)$ и $x_k(t)$ (рис. 2.56) путем исключения параметра t.

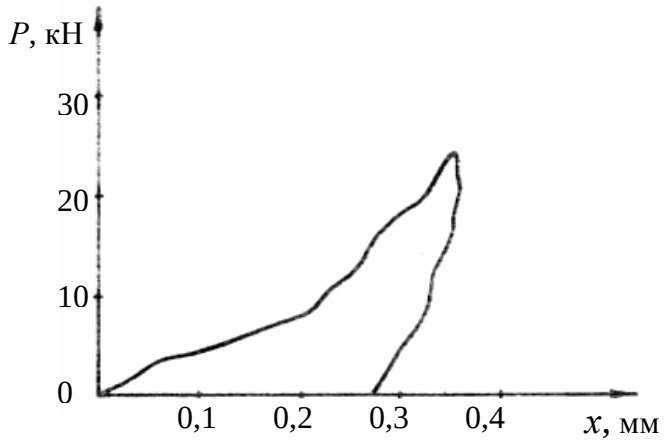


Рис. 2.57. Диаграмма, характеризующая изменение силы взаимодействия инструмента с горной породой в зависимости от величины внедрения инструмента, построенная на основе экспериментальных данных [19]

Ударный импульс представлен [19] в виде совокупности последовательно действующих прямоугольных импульсов, которые показаны на рис. 2.54 пунктирной линией. В данном случае ударный импульс длительностью 420 мкс разбит на 21 ступень длительностью 20 мкс.

Для оценки влияния на рассчитываемые параметры точности аппроксимации диаграммы $P_k(x_k)$ рассмотрены [19] два случая. В первом случае зависимость $P_k(x_k)$ представлена в виде линейной модели без учета упругого отпора инструмента породой (рис. 2.58).

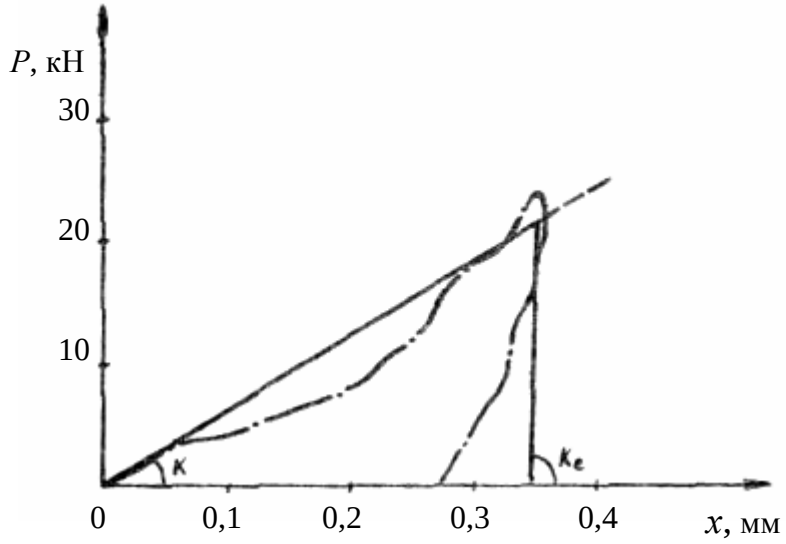


Рис. 2.58. Кусочно-линейная модель зависимости «сила-внедрение» без учета частичного упругого восстановления горной породы

При этом жесткость контакта «инструмент-порода» k при внедрении принята приближенно равной 59000 кН/м, а жесткость контакта при разгрузке $k_e - 99 \cdot 10^5$ кН/м (рис. 2.58).

Во втором случае диаграмма $P_k(x_k)$ аппроксимируется кусочно-линейной моделью с учетом упругого восстановления породы, состоящей из трех участков (рис. 2.59). Жесткости контакта «инструмент-порода» при внедрении в этом случае $k_1 = 58820$ кН/м, $k_2 = 37040$ кН/м, $k_3 = 67560$ кН/м, а жесткость контакта при разгрузке $k_e = 277780$ кН/м.

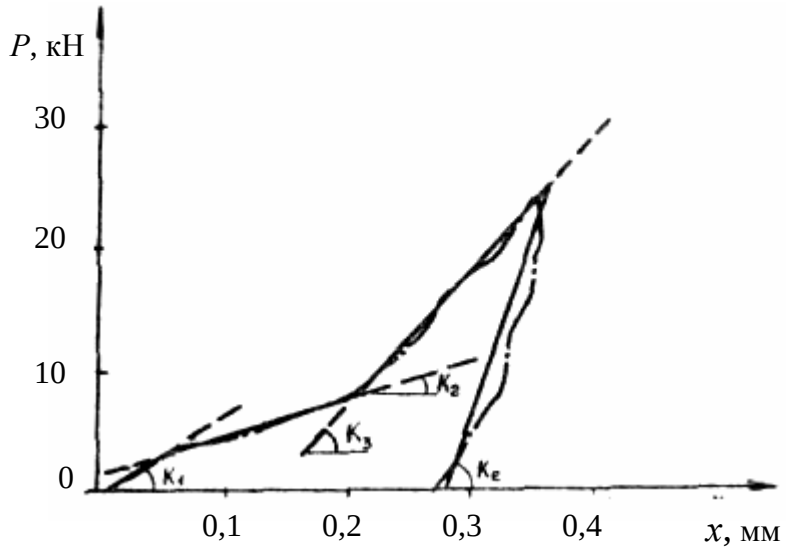


Рис. 2.59. Кусочно-линейная модель зависимости «сила-внедрение» с учетом частичного упругого восстановления горной породы

На рис. 2.60 приведены рассчитанные в работе [19] диаграммы, характеризующие изменение силы взаимодействия инструмента с горной породой (верхняя диаграмма) и величины внедрения инструмента в горную породу (нижняя диаграмма) в зависимости от времени.

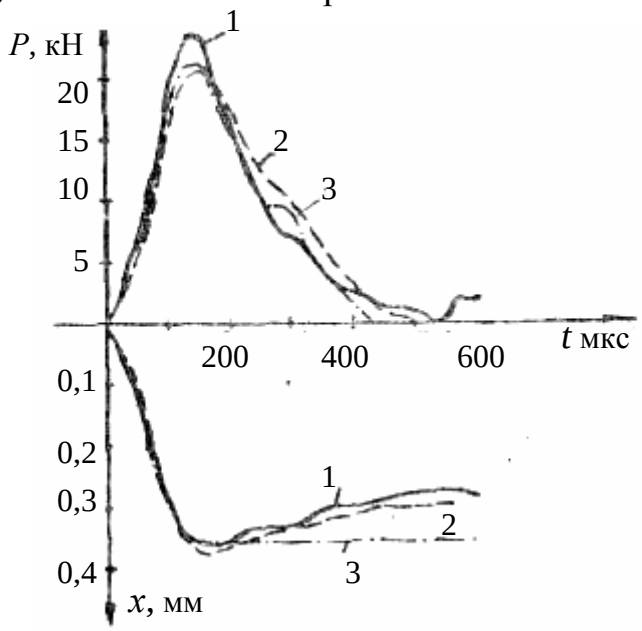


Рис. 2.60. Диаграммы, характеризующие изменение силы взаимодействия инструмента с горной породой (верхняя диаграмма) и величины внедрения инструмента в горную породу (нижняя диаграмма) в зависимости от времени

Диаграмма 1 на рис. 2.60 – экспериментальная осциллограмма; диаграмма 2 – диаграмма, построенная при кусочно-линейной модели зависимости «сила-внедрение» с учетом частичного упругого восстановления горной породы; диаграмма 3 – диаграмма, построенная при кусочно-линейной модели зависимости «сила-внедрение» без учета частичного упругого восстановления горной породы.

Из рисунка видно удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных зависимостей параметров процесса внедрения инструмента в породу как при кусочно-линейной, так и при линейной аппроксимации характеристики $P_k(x_k)$.

В рассмотренном примере влияние степени точности аппроксимации на характер расчетной зависимости усилия в контакте с породой (рис. 2.60, а) незначительно, и отклонение в значении усилия для обоих случаев аппроксимации не превышает 2-2,5 кН при максимальном значении 20-21 кН, т. е. составляет приблизительно 10%.

Точность аппроксимации характеристики «сила-внедрение» оказывает влияние на рассчитываемые параметры отраженного импульса (рис.2.61). Из рис. 2.61 видно, что линейная аппроксимация характеристики $P_k(x_k)$ привела к искажению формы отраженного импульса, в особенности в области растяжения (t=600-720 мкс). Кроме того, модель без учета упругого восстановления породы обусловливает значительную погрешность в определении длительности отраженного импульса.

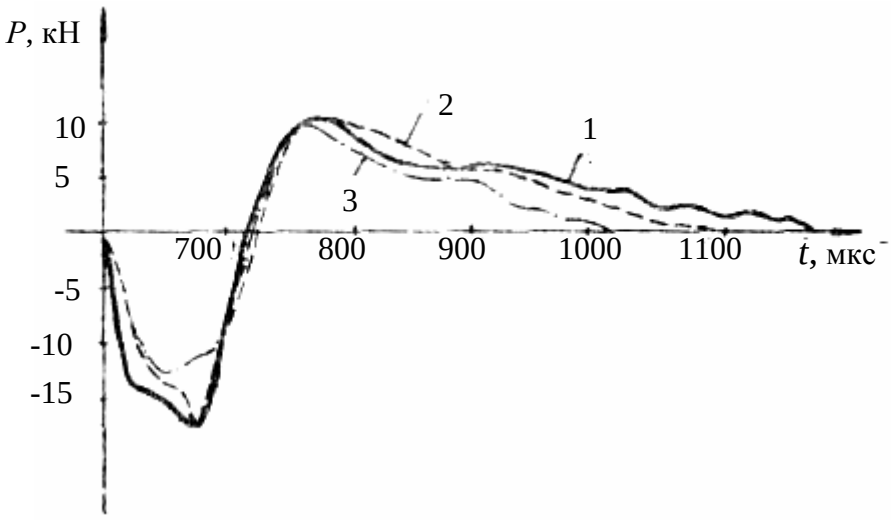


Рис. 2.61. Диаграммы, характеризующие изменение силы в отраженном от горной породы импульсе в зависимости от времени: 1 – экспериментальная осциллограмма; 2 – диаграмма, построенная при кусочно-линейной модели зависимости «сила-внедрение» с учетом частичного упругого восстановления горной породы; диаграмма 3 – диаграмма, построенная при кусочно-линейной модели зависимости «сила-внедрение» без учета частичного упругого восстановления горной породы

Длительность импульса по осциллограмме 580 мкс, длительность, рассчитанная с учетом упругого восстановления, 510 мкс, т. е. относительная погрешность составляет около 12%. Длительность отраженного импульса, вычисленная без учета упругого восстановления, равна длительности прямого (доходного) импульса и составляет 420 мкс с относительной погрешностью 27,5%.

Наиболее значительное влияние точность аппроксимации зависимости «сила-внедрение» оказывает на рассчитываемую величину коэффициента передачи энергии ударного импульса в породу. Энергия отраженного импульса A_0, рассчитанная путем численного интегрирования экспериментальной осциллограммы, составляет 3,01 кДж. Энергия исходного импульса A_u = 5,915 кДж, тогда коэффициент передачи энергии импульса в породу равен

$$\eta = \frac{A_u - A_0}{A_u} = 0{,}491.$$

Коэффициент передачи энергии импульса в породу η составляет 0,458 при кусочно-линейной аппроксимации и 0,636 при линейной аппроксимации. Относительные погрешности определения коэффициента при этом равны соответственно 6,7% и 29,5%. Коэффициент передачи энергии импульса в породу, рассчитанный по разработанному алгоритму при линейной аппроксимации зависимости $P_k(x_k)$, но с учетом упругого восстановления породы, составил 0,499 с относительной погрешностью 1,6%.

На основании проведенного анализа в работе [19] следующие выводы:

– при решении задач, связанных с определением напряжений или усилий в контакте инструмента с породой, в ряде случаев с достаточной точностью может применяться линейная аппроксимация характеристики «сила-внедрение» без учета упругого восстановления породы;
– учет упругого восстановления в значительной степени повышает точность расчета глубины внедрения инструмента и коэффициента передачи энергии в породу;
– точность расчета параметров отраженного импульса повышается при кусочно-линейной аппроксимации зависимости $P_k(x_k)$ по сравнению с линейной аппроксимацией.

2.7.4. *Волновая модель продольного удара при движении стержня в вязкой среде*

На рис. 2.62, а представлена схема продольного удара абсолютно твердого тела 1 по стержню 2. Абсолютно твердое тело 1 массой M движется со скоростью V_0 и наносит удар по стержню 2. Стержень 2 до удара находится в состоянии покоя. Движение стержня будет происходить в вязкой среде и его пе-

ремещению будут препятствовать силы вязкого сопротивления, интенсивность которых равна $q = b \cdot \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (где b − коэффициент пропорциональности).

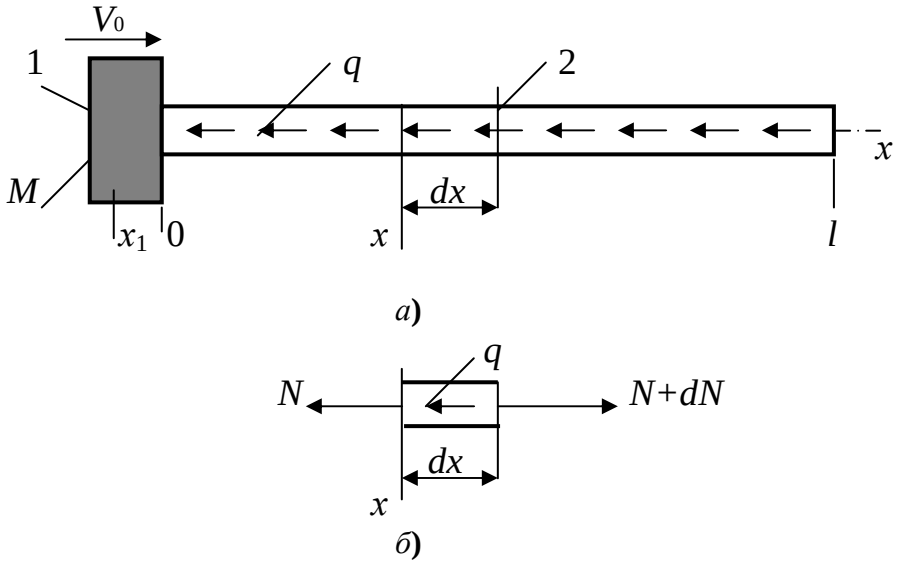


Рис. 2.62. Схема продольного удара по стержню, перемещающемуся в вязкой среде

Выделим элементарный участок стержня dx (рис. 2.62, б). На элементарный участок dx действуют продольные силы N и $N+dN$, а также элементарная сила вязкого сопротивления $q \cdot dx$. Уравнение движения элементарного участка можно представить в виде

$$dm \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = dN - q \cdot dx,$$

где $dm = \rho A dx$ − масса элементарного участка.

Уравнение движения с учетом, что

$$q = b \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \;\; dm = \rho A dx, \; dN = \frac{\partial N}{\partial x} dx, \; \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right],$$

примет вид

$$\rho A \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] - b \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

Представим его как

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] - b \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \rho A \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0.$$

Если продольная жесткость поперечных сечений EA − постоянная величина, то уравнение движения стержня примет вид

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{b}{EA}\cdot\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le x \le l,$$

где $u(x,t)$ − продольное перемещение поперечных сечений стержня; x − координата сечения, t – время, a – скорость распространения волны деформации в материале стержня, l − длина стержня.

Уравнение движения абсолютно твердого тела 1 описывается уравнением

$$M \cdot \ddot{x}_1 = EA\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}, \quad \text{если } x_1 = u(0,t),$$

$$M \cdot \ddot{x}_1 = 0, \quad \text{если } x_1 < u(0,t),$$

где x_1 − координата, определяющая положение абсолютно твердого тела 1, M − масса тела 1.

Начальные условия определяют состояние стержня 2 и абсолютно твердого тела 1 при $t = t_0 = 0$:

$$\dot{x}_1(0) = \frac{\partial u(0,t_0)}{\partial t} = V_0, \ \frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t} = 0, \ \frac{\partial u(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad 0 < x \le l.$$

Краевые условия определяют отсутствие сил лобового сопротивления в сечении $x = l$ и условия взаимодействия абсолютно твердого тела 1 со стержнем 2:

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \quad M \cdot \ddot{x}_1 = EA\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}, \quad \text{если } x_1 = u(0,t),$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \text{если } x_1 < u(0,t).$$

2.7.5. *Волновая модель продольного удара при движении стержня в упруговязкой среде*

На рис. 2.63, а представлена схема продольного удара абсолютно твердого тела 1 по стержню 2. Абсолютно твердое тело 1 массой M движется со скоростью V_0 и наносит удар по стержню 2. Стержень 2 до удара находится в состоянии покоя. Движение стержня происходит в упруговязкой среде и его перемещению будут препятствовать силы вязкого сопротивления интенсивностью q_1 и упругие силы интенсивностью q_2.

Интенсивность сил вязкого сопротивления равна $q_1 = b \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (где b − коэффициент пропорциональности). Интенсивность упругих сил пропорциональна величине перемещения поперечного сечения стержня $q_2 = k \cdot u(x,t)$.

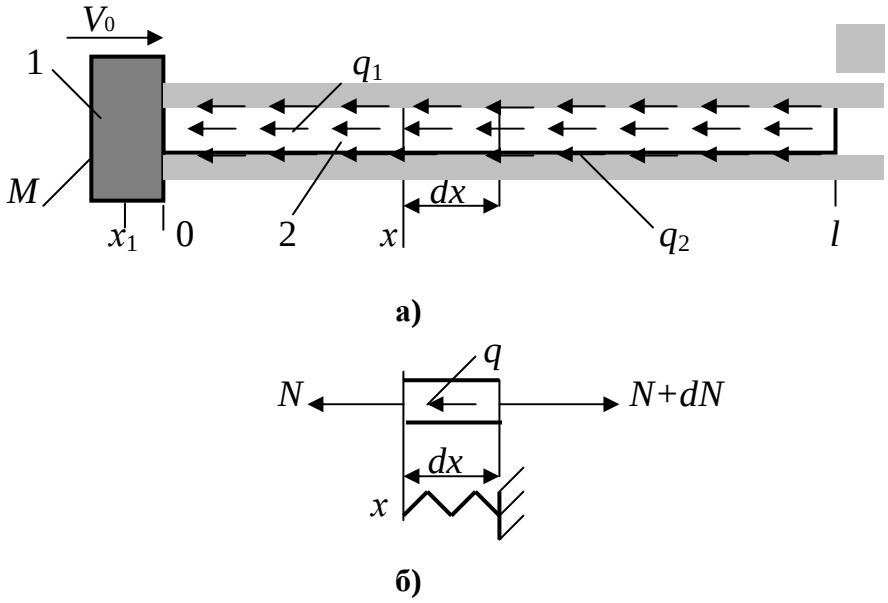


Рис. 2.63. Схема продольного удара по стержню, перемещающемуся в упруго-вязкой среде

Выделим элементарный участок стержня dx (рис. 2.63,б). На элементарный участок dx действуют продольные силы N и $N+dN$, элементарная упругая сила $q_2 \cdot dx$, а также элементарная сила вязкого сопротивления $q_1 \cdot dx$.

Уравнение движения элементарного участка можно представить в виде

$$dm \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = dN - q_1 \cdot dx - q_2 \cdot dx,$$

где $dm = \rho A dx$ − масса элементарного участка.

Уравнение движения с учетом, что

$$q_1 = b \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \; q_2 = k \cdot u(x,t), \quad dm = \rho A dx, \quad dN = \frac{\partial N}{\partial x} dx,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right],$$

примет вид

$$\rho A \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] - b \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - k \cdot u(x,t).$$

Представим его как

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] - \rho A \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - b \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - k \cdot u(x,t) = 0.$$

Если продольная жесткость поперечных сечений EA − постоянная величина, то уравнение движения стержня примет вид

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{b}{EA}\cdot\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\kappa}{EA}\cdot u(x,t) = 0, \quad 0 \le x \le l,$$

где $u(x,t)$ − продольное перемещение поперечных сечений стержня; x − координата сечения, t – время, a – скорость распространения волны деформации в материале стержня, κ − коэффициент, определяющий упругие свойства внешней среды; l − длина стержня.

Уравнение движения абсолютно твердого тела 1 описывается уравнением

$$M \cdot \ddot{x}_1 = EA\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}, \text{ если } x_1 = u(0,t),$$

$$M \cdot \ddot{x}_1 = 0, \text{ если } x_1 < u(0,t),$$

где x_1 − координата, определяющая положение абсолютно твердого тела 1, M − масса тела 1.

Начальные условия определяют состояние стержня 2 и абсолютно твердого тела 1 при $t = t_0 = 0$:

$$\dot{x}_1(0) = \frac{\partial u(0,t_0)}{\partial t} = V_0, \ \frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t} = 0, \ \frac{\partial u(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad 0 < x \le l.$$

Краевые условия определяют отсутствие сил лобового сопротивления в сечении $x = l$ и условия взаимодействия абсолютно твердого тела 1 со стержнем 2:

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \quad M \cdot \ddot{x}_1 = EA\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}, \text{ если } x_1 = u(0,t),$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \text{ если } x_1 < u(0,t).$$

2.7.6. *Модель продольного удара по стержню с представлением ударной системы в виде совокупности колебательных звеньев*

Для расчета продольного удара по стержню при движении его в упруговязкой среде Санкиным Ю. Н. и Каталымовым Ю. В. предложена модель (модель Санкина Ю. Н. – Каталымова Ю. В.) [88, 89], суть которой поясним ниже.

При построении модели ударной системы такие параметры, как масса, жесткость и рассеяние энергии, считаются распределенными по длине стержня. Предлагаемая методика динамического расчета стержней при ударном воздействии основана на построении математической модели стержня, как системы с распределенными параметрами, в виде суммы колебательных звеньев, представляющих собой передаточную функцию механического волновода, учитывающего влияние силового воздействия на разные точки стержня.

Дифференциальные уравнения динамики вязко-упругого тела в операторной форме могут быть записаны в виде:

$$D \cdot \delta + R \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + G \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \xi \cdot u - f = 0;$$

$$\left(C + \frac{\partial C_1}{\partial t} \right) D^* \cdot u = \delta, \qquad (2.17)$$

где δ – вектор обобщенных сил; u – вектор обобщенных перемещений; R – симметричная положительно-определенная матрица инерции; C – симметричная положительно-определенная матрица упругих, характеристик; C_1 и G – симметричные положительно-определенные матрицы рассеяния энергии; f – вектор-функция внешней нагрузки; t – время; ξ – матрица коэффициентов упругого основания; D и D^* – дифференциальные операторы, сопряженные в смысле Лагранжа:

$$_V\int (D \cdot \delta)^T \cdot u \cdot dV = {}_V\int \delta^T \cdot D^* \cdot u \cdot dV - {}_S\int \delta_S^T \cdot u_S \cdot dS,$$

где V – область, занимаемая упругим телом; S – поверхность упругого тела; $\delta_S = n_\delta \cdot \delta$, $u_S = n_u \cdot u$ – обобщенные силы и перемещения на поверхности тела; n_δ, n_u – операторы статической совместности на поверхности тела: индекс «т» означает «транспонирование».

Рассмотрена пространственная упругая система, когда на части границы S_1 заданы силы, а другая часть S_2 закреплена. Исключив в уравнениях (2.17) обобщенные силы, авторы получили уравнение динамики в обобщенных перемещениях:

$$R \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + K \cdot u - f = 0, \qquad (2.18)$$

где $B = D \cdot C_1 \cdot D^* + G$ – оператор рассеяния энергии; $K = D \cdot C \cdot D^* + \xi$ – оператор упругости.

Граничные условия на S_1: $n_\delta \left(C + \frac{\partial C_1}{\partial t} \right) D^* \cdot u = f_S$, (2.19)

на S_2: $n_u \cdot u = 0$, (2.20)

где $S = S_1 + S_2$.

Начальные условия:

$$u\big|_{t=0} = u_0; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1. \qquad (2.21)$$

Оператор упругости при однородных граничных условиях (2.19) и (2.20) положительно-определенный, имеет дискретный спектр, а собственные функции его ортогональны. Преобразование уравнения (2.18) по Лапласу при нулевых условиях (2.21) приводит к равенству:

$$R \cdot p^2 \cdot u + B \cdot p \cdot u + K \cdot u = f \,, \tag{2.22}$$

где p – параметр преобразования Лапласа.

2.7.7. *Волновая модель продольного удара по стержню с распределенными по боковой поверхности силами типа сухого трения и силой лобового сопротивления*

Волновая модель продольного удара по стержню с распределенными по боковой поверхности силами типа сухого трения и силой лобового сопротивления описана в работе [121].

На рис. 2.64, а представлена схема продольного удара абсолютно твердого тела 1 по стержню 2. Абсолютно твердое тело 1 массой M движется со скоростью V_0 и наносит удар по стержню 2. Стержень 2 до удара находится в состоянии покоя. Движение стержня происходит в технологической среде и его перемещению будут препятствовать силы сопротивления в виде сил сухого трения интенсивностью q и сила лобового сопротивления P.

Выделим элементарный участок стержня dx (рис. 2.64, б). На элементарный участок dx действуют продольные силы N и $N+dN$, а также элементарная сила трения $q \cdot dx$.

Уравнение движения элементарного участка можно представить в виде

$$dm \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = dN - q \cdot dx,$$

где $dm = \rho A dx$ – масса элементарного участка.

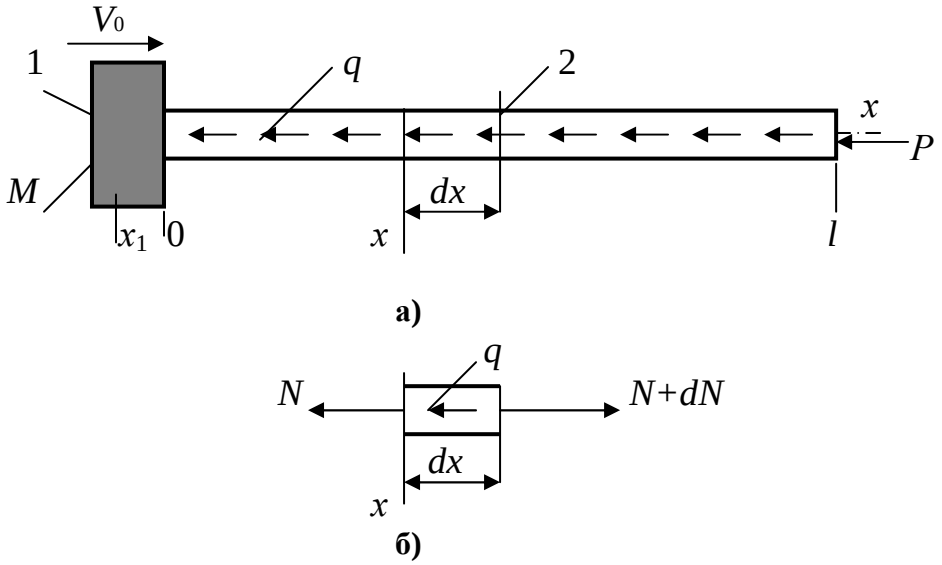


Рис. 2.64. Схема продольного удара по стержню

Уравнение движения с учетом, что

$$q = q \cdot \mathrm{sgn}(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}),\ \ dm = \rho A dx,\ dN = \frac{\partial N}{\partial x} dx,\ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right],$$

примет вид

$$\rho A \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] - q \cdot \mathrm{sgn}(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}),$$

где $\mathrm{sgn}(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t})$ описывается следующими равенствами:

$$\mathrm{sgn}(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} > 0, \\ 0, & \text{если } \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0, \\ -1, & \text{если } \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} < 0. \end{cases}$$

Представим уравнение движения как

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] - \rho A \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = q \cdot \mathrm{sgn}(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}).$$

Если продольная жесткость поперечных сечений EA − постоянная величина, то уравнение движения стержня примет вид

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{q}{EA} \cdot \mathrm{sgn}(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}), \quad 0 \le x \le l,$$

где $u(x,t)$ − продольное перемещение поперечных сечений стержня; x − координата сечения, t – время, a – скорость распространения волны деформации в материале стержня, l − длина стержня.

Уравнение движения абсолютно твердого тела 1 описывается уравнением

$$M \cdot \ddot{x}_1 = EA \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}, \ \text{ если } x_1 = u(0,t),$$

$$M \cdot \ddot{x}_1 = 0, \ \text{ если } x_1 < u(0,t),$$

где x_1 − координата, определяющая положение абсолютно твердого тела 1, M − масса тела 1.

Начальные условия определяют состояние стержня 2 и абсолютно твердого тела 1 при $t = t_0 = 0$:

$$\dot{x}_1(0) = \frac{\partial u(0,t_0)}{\partial t} = V_0, \ \frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t} = 0, \ \frac{\partial u(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad 0 < x \le l.$$

Краевые условия определяют наличие силы лобового сопротивления в сечении $x = l$ и условия взаимодействия абсолютно твердого тела 1 со стержнем:

$$EA\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \begin{cases} P, \text{ если } \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial t} > 0, \\ 0, \text{ если } \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial t} \le 0, \end{cases}$$

$$M \cdot \ddot{x}_1 = EA\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}, \quad \text{если } x_1 = u(0,t),$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \text{если } x_1 < u(0,t).$$

2.7.8. *Волновая модель продольного удара по стержню с учетом сил трения*

Данная модель применительно к задаче удара по свае разработана Никитиным Л. В. (модель Никитина Л. В.) и опубликована в работах [95, 160 – 163]. Изложим ее суть. Постановка задачи определения сопротивления свай на основе волновой теории продольного удара по стержню, взаимодействующему с окружающей средой по закону сухого кулонового трения, принадлежит Герсеванову Н. М. [51]. Однако в работе [51] не было учтено, что сила трения на боковой поверхности сваи проявляется только в момент возникновения движения. Обобщение решения на случай учета лобового сопротивления и более сильного удара, когда свая продолжает двигаться после прихода отраженной от ударяемого конца волны, получено в [163].

Свая моделируется [95] упругим стержнем длиной l, поперечным сечением A, периметром L. Свая погружена в грунт, с которым взаимодействует по закону кулонова трения. Это означает, что в момент возникновения движения сваи относительно грунта на ее боковой поверхности возникает сила трения F. Продольное напряжение σ и скорость сечений v упругой сваи-стержня удовлетворяют уравнению движения

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} + k\tau \tag{2.23}$$

и закону Гука в продифференцированном виде

$$E\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \tag{2.24}$$

где t – время; ρ – плотность; E – модуль Юнга; $\tau = F / LA$ – приведенная сила трения. Величина k при движении зависит от знака скорости.

Обратим внимание, что в работе [95] приведена формула $\tau = FL / A$, что является опечаткой. При отсутствии движения *к* не обязательно равна нулю и может принимать любые значения, удовлетворяющие неравенству $|k| \le 1$. Величина k должна быть найдена в процессе решения задачи.

Уравнения (2.23) и (2.24) образуют систему для определения напряжения σ и скорости сечений v. Вместо них можно записать одно уравнение второго порядка относительно перемещения u

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k\tau}{\rho}, \tag{2.25}$$

где через $a = (E / \rho)^{1/2}$ обозначена скорость упругих волн в стержне.

Система (2.23), (2.24) или уравнение (2.25) являются нелинейными ввиду наличия в них переключателя сухого трения k. В области, где движение происходит с проскальзыванием, уравнение (2.25) отличается от классического волнового лишь константой, умноженной на знак скорости.

Трудность решения задач, как считают авторы [95], заключается в нахождении границ, разделяющих области покоя и движения с разными знаками скорости. Величина k, будучи функцией скорости, является заранее неизвестной, искомой функцией. Иногда из постановки задачи знак скорости является очевидным. Однако даже в этом случае решение нетривиально, поскольку необходимо находить неизвестную границу раздела областей покоя и движения.

При остановке движения величина *к* по-прежнему остается неизвестной искомой функцией и ее можно определить [95] из уравнения (2.23)

$$d\sigma / dx = k\tau. \tag{2.26}$$

Таким образом, в общем случае даже при покое напряжения в стержне могут отличаться от нуля, что следует иметь в виду при постановке начальных условий.

2.7.9. *Волновая модель продольного удара по стержню с учетом сил трения по боковой поверхности*

Модель удара по стержню-свае с учетом сил трения по боковой поверхности разработана Стойчевым В. Б., Можаевым И. В. (модель Стойчева В. Б. – Можаева И. В.) и опубликована в работе [203].

Сваю авторы рассматривают как стержень, зажатый своей боковой поверхностью в грунте, с равномерно распределенным по ней трением R^f и с сопротивлением грунта на ее нижнем конце, равным R^n.

Волновое уравнение имеет вид

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ka^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{2.27}$$

где $a = \sqrt{E/\rho}$ – волновая скорость в материале сваи (E – модуль упругости материала сваи); ρ – массовая плотность материала сваи; $k = \frac{rq}{AE}$ (r – периметр сваи; q – сопротивление трения, приходящееся на одну квадратную единицу боковой поверхности сваи; A – площадь поперечного сечения сваи).

Вводится предположение, что напряжения, возникающие в голове сваи при ударном воздействии на нее, передаются нижнему концу сваи не сразу и не полностью, а постепенно уменьшаясь вследствие сопротивления грунта по боковой поверхности сваи, и меняет свою величину по закону:

при $at + x < l$ величина $k = 0$; при $at + x \geq l$ величина $k = \frac{rq}{AE}$.

Начальные и граничные условия процесса:

при $t = 0$ $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=l} = -v$, где v – скорость, сообщенная верхнему сечению сваи ударным воздействием;

при $t = 0$ напряжения $E\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ и скорости $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ во всех сечениях;

при $x = l$ $ml\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{x=l} = -a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l}$,

где m – отношение массы ударника к массе сваи.

Приведенная в работе [203] формула $ml\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{x=l} = -a^2\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=l}$ является опечаткой. В правой части равенства должна быть продольная деформация $\frac{\partial u}{\partial x}$, а не скорость $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Процесс опускания нижнего конца сваи рассматривается особо. Момент начала опускания сваи принимается теперь за начальный. В течение всего процесса опускания от одного ударного воздействия напряжение на нижнем конце остается постоянным:

$$E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = -\frac{R^n}{A} = -\lambda = const. \qquad (2.28)$$

2.8. Волновая модель продольного удара с учетом инерции движения частиц в радиальном направлении

В модели Сен-Венана и следующих из нее волновых уравнений, описывающих движение стержня при продольном ударе, используется гипотеза плоских сечений. В работе Мясникова А. А. [159] выводится уравнение продольных колебаний для стержней переменного поперечного сечения из общих уравнений теории упругости методом последовательного приближения. Это позволило отказаться от гипотезы плоских поперечных сечений, как в теории продольных колебаний стержней Сен-Венана, но при сохранении структур базовых уравнений одинаковыми. Уравнения выведены для цилиндрической системы координат.

При продольном сжатии стержня не возникает напряжений в направлениях перпендикулярных оси стержня. При статическом сжатии эта гипотеза естественна. При динамическом сжатии может быть принята как «нулевое» приближение, при использовании метода последовательных приближений.

Уравнение Сен-Венана выводится для элемента стержня ограниченного боковой поверхностью и двумя поперечными сечениями, отстоящими друг от друга на расстоянии dx (рис. 2.65).

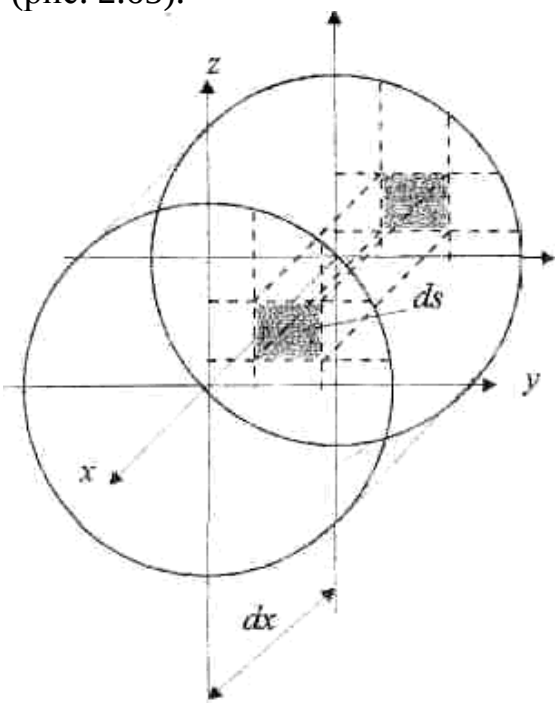


Рис. 2.65. К выводу модифицированного уравнения продольных колебаний

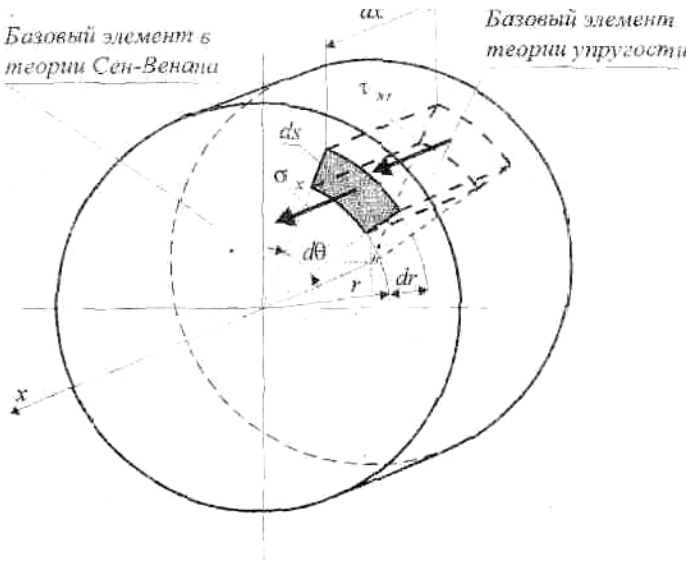


Рис. 2.66. К выводу модифицированного уравнения продольных колебаний стержня в цилиндрических координатах

Уравнения теории упругости выведены для элементарного параллелепипеда с размерами *dx*, *dy*, *dz*. Для «согласования» теорий автором [159] используется единый «базовый» элемент, как в теории Сен-Венана: элемент стержня ограниченного боковой поверхностью и двумя плоскими поперечными сечениями, отстоящими на бесконечно малом расстоянии *dx* друг от друга (рис. 2.66).

Система, совершающая продольные колебания считается осесимметричной по геометрии, физическим свойствам и нагружению, т. е. все функции не зависят от угловой координаты.

Выбирается следующая цилиндрическая система координат: ось поперечных сечений *x* совпадает с осью симметрии системы; положение точки в поперечном сечении определяют полярные координаты – линейная *r* и угловая θ.

В результате сделанных предположений автором [159] получен следующий вариант уравнения продольных колебаний:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EA(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]-2G\mu A(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\rho A(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},$$

где E, G − модули упругости 1-го и 2-го рода материала стержня; $A(x)$ − площадь поперечного сечения стержня, положение которого определяется координатой *x*; μ − коэффициент Пуассона, ρ − плотность материала стержня, $u(x,t)$ − продольное перемещение поперечных сечений стержня.

В случае, если свойства материала не меняются, т. е. E, G, ρ, μ − постоянные величины и стержень постоянного поперечного сечения, то уравнение несколько упрощается:

$$(E-2G\mu)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},$$

или с учетом, что

$$G=\frac{E}{2(1+\mu)},\qquad E-2G\mu=\frac{E}{1+\mu},$$

получается следующая модификация уравнения:

$$\frac{E}{1+\mu}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

Одномерная теория Сен-Венана дает для этого случая следующее уравнение:

$$E\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

Сравнительный анализ уравнений показывает, что они совпадают при нулевом значении коэффициента Пуассона $\mu = 0$. По известному анализу решений этих уравнений в форме Даламбера скорость распространения продольных колебаний определится следующими соотношениями: по модели Сен-Венана $a=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$, по модифицированному уравнению $a=\sqrt{\frac{E}{\rho(1+\mu)}}$.

2.9. Волновая модель продольного удара по стержню с учетом дисперсии

Здесь изложена волновая модель продольного удара по стержню с учетом дисперсии, разработанная Адищевым В. В., Вдовиным В. Е., Кардаковым В. Б. и опубликованная в работах [4, 5, 6]. Задача расчета на прочность строительных конструкций при ударном нагружении достаточно актуальна. Авторы [5] отмечают, что большое количество железобетонных свай разрушается при забивке в грунт. Существующая методика расчета свай на ударную прочность основывается на простейшей математической постановке задачи об ударе по стержню, не учитывает характер армирования.

Аналогичные задачи возникают при расчете железобетонных фундаментов на воздействие импульсных нагрузок. В работах [71, 72] для изучения ди-

намики массивных железобетонных фундаментов используется система уравнений трехмерной теории упругости. Показано, что при импульсном воздействии необходим учет волнового характера процесса формирования. Но и в этих работах железобетон считается изотропным материалом.

В действительности железобетон – композиционный материал. Его жесткостные характеристики зависят как от упругих постоянных бетона, так и от характеристик армирования (плотность армирования, направление армирования и т. д.). Исследованию процессов распространения волн напряжений в композиционных материалах посвящены работы [33, 155]. Наиболее характерным свойством этих процессов является дисперсия волн, так как волновой пакет, составленный из гармонических волн различной длины, расплывается, а его амплитуда при отсутствии диссипации убывает в процессе распространения.

В случае слабой дисперсии уравнение, описывающее одномерные движения диспергирующей среды, в первом приближении имеет вид [5]

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h_0^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \tau_0^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2}, \tag{2.29}$$

где $u(x,t)$ – перемещения; t – время; x – пространственная координата; $a^2 = \dfrac{E}{\rho}$; E – модуль упругости; ρ – плотность среды.

При феноменологическом подходе h_0, τ_0 являются эмпирическими константами среды, при модельном подходе эти константы могут быть выражены через параметры исходной модели.

При отсутствии дисперсии ($h_0 = 0, \tau_0 = 0$) уравнение (2.29) представляет собой волновое уравнение, которое описывает распространение волн со скоростью a. Полагая $h_0 \neq 0, \tau_0 = 0$ или $h_0 = 0, \tau_0 \neq 0$, авторы [5] получают уравнения

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h_0^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \tag{2.30}$$

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau_0^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2}. \tag{2.31}$$

Постоянная h_0 имеет размерность длины; τ_0 – времени. Уравнение (2.30) представляет собой в некотором приближении уравнение движения неоднородной среды, при этом параметр пространственной дисперсии h_0 можно рассчитать или определить экспериментально.

Авторы [5] отмечают, что уравнение (2.31) – это известное уравнение Релея–Лява, которое описывает распространение длинных волн по стержню.

Длина волны при этом значительно превышает поперечные размеры стержня. В случае распространения волн по однородному стержню уравнение (2.31) выводится с помощью принципа Гамильтона, при этом учитывается энергия поперечных движений, а параметр дисперсии τ_0 вычисляется по известным геометрическим характеристикам сечения стержня и упругим константам. В случае неоднородного стержня, например армированного, очевидно, τ_0 зависит от параметров армирования.

В работе [5] отмечено, что для малых значений параметров дисперсии уравнения (2.30), (2.31) эквивалентны в том смысле, что законы дисперсии для них одинаковы. Но при постановке краевых задач уравнение (2.31) предпочтительнее, так как оно содержит лишь вторую производную по пространственной координате. С помощью вариационного принципа краевые условия для этого уравнения будут сформулированы ниже. Для уравнения (2.30) вопрос о краевых условиях остается открытым.

В работе [5] рассмотрена задача об ударе груза массой M по торцу стержня. Скорость груза равна v_0. Линейная плотность кинетической энергии может быть записана в виде

$$T = \frac{1}{2}\rho \cdot S \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 \right], \tag{2.32}$$

где S – площадь поперечного сечения стержня. Второе слагаемое в формуле (2.32) определяет усредненную по сечению энергию поперечных колебаний частиц стержня. Постоянная h имеет размерность длины и должна зависеть от размеров сечения и от параметров, определяющих внутреннюю структуру стержня. Как отмечалось выше, h может быть вычислена или определена экспериментально. В дальнейшем авторы [5] считают параметр h известным.

Линейная плотность энергии упругого деформирования

$$W = \frac{1}{2} S \cdot E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \tag{2.33}$$

Если помимо удара груза массой M стержень подвергается действию давления $f(t)$ на торец $(x = 0)$, работа внешних сил вычисляется по формуле

$$A = f(t) \cdot S \cdot u(0,t) - \frac{1}{2} M \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \Big|_{x=0}. \tag{2.34}$$

В соответствии с принципом Гамильтона уравнение движения и граничные условия следуют из условия стационарности функционала [5]

$$I = \int_0^{t_1}\int_0^{l}(T - W + A)dxdt. \qquad (2.35)$$

Здесь стержень считается конечным, l – длина стержня.

С учетом равенств (2.32) – (2.34) I принимает вид

$$I = \int_0^{t_1}\left\{\frac{1}{2}\rho S\int_0^{l}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)^2\right]dx - \frac{1}{2}SE\int_0^{l}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx + Sf(t)u(0,t) -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}M\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \Big|_{x=0}\right\}dt. \qquad (2.36)$$

Вычисляя вариацию функционала δ, авторами [5] получено

$$\delta I = ES\int_0^{t_1}\int_0^{-l}\left[\frac{\rho}{E}h^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]\delta u dxdt + S\int_0^{t_1}\left[-E\frac{\partial u}{\partial x} - \rho h^2\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2} +\right.$$

$$\left. + Sf(t) + M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]\delta u dt \Big|_{x=0} + S\int_0^{t_1}\left[-E\frac{\partial u}{\partial x} - ph^2\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}\right]\delta u dt\Big|_{x=l} +$$

$$+\rho S\int_0^{l}\left[\frac{\partial u}{\partial t} - h^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right]\delta u dx \Big|_{\substack{t=t_1\\ t=0}} - M\frac{\partial u}{\partial t}\delta u \Big|_{x=0}\Big|_{\substack{t=t_1\\ t=0}} + \rho Sh^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\delta u \Big|_{\substack{x=l\\ x=0}}\Big|_{\substack{t=t_1\\ t=0}} \qquad (2.37)$$

Из условия $\delta I = 0$ и произвольности вариации δu получены [5] уравнение движения и граничные условия. Тождественное равенство нулю подынтегральной функции в первом интеграле приводит к уравнению

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau_0^2\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}. \qquad (2.38)$$

Здесь авторами [5] введено обозначение $\tau_0 = \dfrac{h}{a}$ с целью привести уравнение к виду (2.31). Второй интеграл дает граничное условие при $x = 0$:

$$f(t)S + M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{x=0} = ES\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \tau_0^2\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}\right)\Big|_{x=0}. \qquad (2.39)$$

Аналогично можно получить граничное условие при $x = l$. Последние три слагаемые в (2.37) равны нулю, так как в соответствии с принципом Гамильтона $\delta u \big|_{t=0} = \delta u \big|_{t=t_1} = 0$. Для полубесконечного стержня граничные условия при $x = l$ заменяются условием ограниченности решения при $x \to \infty$.

Начальные условия формулируются [5] так:

$$u(x,0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad \text{при} \quad x \geq 0; \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_0 \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{2.40}$$

Для простоты вычислений считается [5], что нагрузка $f(t) = 0$.

Таким образом, авторами [5] сформулирована начально-краевая задача (2.38) – (2.40) об ударе груза массой *M* по торцу полубесконечного стержня из диспергирующего материала. При $\tau_0 = 0$ (дисперсия отсутствует), уравнения (2.38) – (2.40) соответствуют этой задаче в классической упругой постановке. Существенно также, что параметр дисперсии входит в граничное условие.

Поставленную краевую задачу авторы [5] считают целесообразным решать с помощью интегрального преобразования Лапласа по t. В преобразованном виде уравнение (2.39) принимает форму

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} - \frac{p^2}{a^2(1+\tau_0^2 p^2)} \tilde{u} = 0, \tag{2.41}$$

где p – параметр преобразования Лапласа ($\operatorname{Re} p > 0$); $\tilde{u} = \tilde{u}(x, p)$ – трансформанта Лапласа функции $u(x,t)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены различные модели продольного удара в стержневых системах, которые могут быть использованы для определения ударной силы и расчета на прочность стержневой системы. Сложность той или иной модели определяется, по сути, моделью распределенных сил инерции стержневой системы.

Ньютоновская модель удара широко используется в теории виброударных систем, когда исследуется движение соударяемых тел на больших интервалах времени, по сравнению с которыми допустимо считать удар мгновенным. Однако в практике конструирования машин важной является и другая задача – определение сил для проведения прочностных расчетов. Для решения этой задачи модель удара абсолютно твердых тел вообще неприемлема, так как предположение о мгновенном ударе приводит к необходимости считать, что при соударении возникает бесконечно большая сила. А при расчете на прочность такой результат не может быть принят.

В основе построения модели Герца лежат две гипотезы. Предполагается, что при взаимодействии соударяющихся тел существенными являются местные деформации в зоне контакта. Вторая гипотеза состоит в том, что зависимость контактной силы от контактной деформации при ударе остается такой же, как и при статическом сжатии тел. С использованием этих гипотез модель продольного удара двух тел может быть представлена моделью удара абсолютно твердых тел, взаимодействующих между собой в общем случае через нелинейный упругий элемент.

Модель удара Релея позволяет провести расчет ударной силы, оценить продолжительность удара. Однако для ее использования необходимо вводить гипотезу о распределении деформаций по стержню, что вносит определенный произвол в решении и в зависимости от принимаемой гипотезы может привести к различным результатам.

Модель удара сосредоточенной массы по стержню, ориентированная на определение коэффициента динамичности, использует гипотезу о соответствии характера распределения деформаций по стержню при статическом и динамическом нагружениях, что вносит определенный произвол в решение задачи. Кроме того, этот подход не позволяет оценивать длительность удара.

Модель удара сосредоточенной массы по стержню, когда учитываются лишь упругие свойства стержня, когда помимо упругих свойств учитывается и масса стержня, сосредоточенная в характерных сечениях, позволяет провести анализ ударного процесса. Однако точность расчета требует увеличения числа независимых координат. Модель не учитывает такого эффекта, как распространение деформаций по стержню с конечной скоростью. Предполагается, что деформации распространяются мгновенно.

Описана волновая модель продольного удара, на основе которой представлен целый ряд моделей продольного удара стержневых систем неоднород-

ной структуры. Эти модели охватывают такие свойства стержневых систем, как их конфигурацию, упругие свойства сопряженных сечений (наличие упругих элементов), инерционные свойства сопряженных сечений (наличие сосредоточенных масс) и так далее.

Рассмотрены следующие волновые модели продольного удара:

– волновая модель продольного удара сосредоточенной массы по стержню, взаимодействующему с абсолютно жесткой преградой (модель продольного удара Сен-Венана);

– волновая модель продольного удара по стержню с разнородными участками;

– волновая модель продольного удара, построенная на основе использования теоремы об изменении количества движения механической системы;

– волновая модель продольного удара ступенчатых стержней;

– модель продольного удара стержней с переменной жесткостью поперечных сечений, построенная на основе использования теоремы об изменении количества движения механической системы;

– волновая модель продольного удара с учетом распределенных сил инерции стержневой системы и контактных деформаций соударяемых тел (модель продольного удара Сирса);

– модель продольного удара сосредоточенной массы по стержню при нелинейной характеристике контактного взаимодействия с учетом пластических деформаций;

– волновая модель продольного удара стержня конечной длины о полуограниченный однородный стержень;

– волновая модель продольного удара однородных стержней конечной длины;

– волновая модель движения стержня при внезапно приложенном давлении на торце стержня;

– волновая модель движения разнородных стержней при линейном упругом элементе между ними и внезапно приложенном давлении на торце стержня;

– волновая модель движения стержня с разнородными участками при сосредоточенной массе между ними и внезапно приложенном давлении на торце стержня;

– волновая модель движения стержня с сосредоточенной массой и внезапно приложенном давлении на торце стержня;

– волновая модель движения стержня с сосредоточенной массой и линейным упругим элементом при внезапно приложенном давлении на торце стержня;

– волновая модель движения поперечных сечений стержня с закрепленным торцом при внезапно снятой нагрузке;

– волновая модель движения поперечных сечений стержня с закрепленным торцом и с сосредоточенной массой на другом торце при внезапно снятой нагрузке;

– волновая модель продольного удара сосредоточенной массы по полуограниченному стержню с упругой прокладкой в ударном сечении;

– волновая модель продольного удара сосредоточенной массы по полуограниченному неоднородному стержню с линейным упругим элементом в ударном сечении;
– модель продольного удара стержня конечной длины о полуограниченный стержень с линейным упругим элементом в ударном сечении;
– модель удара стержня конечной длины по неоднородному стержню с упругой прокладкой в ударном сечении;
– волновая модель неторцевого продольного удара;
– волновая модель продольного удара по стержню с абсолютно твердым телом на упругой подвеске;
– волновая модель продольного удара по стержню с сосредоточенными массами;
– волновая модель продольного удара по стержню с сосредоточенными массами на упругих подвесках;
– волновая модель продольного удара по стержню с закрепленной сосредоточенной массой на торце;
– волновая модель продольного удара неоднородных стержней с упругими элементами на границах разнородных участков;
– волновая модель продольного удара в стержневой системе при наличии зазора между стержнями;
– волновая модель продольного удара в стержневой системе при наличии зазора и упругого элемента между стержнями;
– волновая модель продольного удара стержня с изменяющейся продольной жесткостью поперечных сечений;
– модель удара конического стержня о жесткую преграду;
– волновая модель продольного удара конического стержня о жесткую преграду при аппроксимации конической поверхности последовательно сопряженными цилиндрическими участками;
– волновая модель продольного удара конического стержня об однородный полуограниченный стержень;
– волновая модель продольного удара конического стержня о полуограниченный стержень при аппроксимации конической поверхности последовательно сопряженными цилиндрическими участками;
– волновая модель продольного удара по стержню с участком переменной жесткости и закрепленной сосредоточенной массой на торце;
– волновая модель продольного удара гиперболического стержня об однородный полуограниченный стержень;
– волновая модель продольного удара параболического стержня об однородный полуограниченный стержень;
– волновая модель продольного удара экспоненциального стержня об однородный полуограниченный стержень;
– волновая модель продольного удара полукатеноидального стержня об однородный полуограниченный стержень;

– волновая модель продольного удара при взаимодействии стержня с технологической средой или объектом;
– модель взаимодействия волны деформации с технологическим объектом или средой;
– модель продольного удара по свае при взаимодействии ее с технологической средой;
– модели характеристик сопротивления технологической среды типа «горная порода» внедрению инструмента;
– волновая модель продольного удара при движении стержня в вязкой среде;
– волновая модель продольного удара при движении стержня в упруго-вязкой среде;
– модель продольного удара по стержню с представлением ударной системы в виде совокупности колебательных звеньев;
– волновая модель продольного удара по стержню с распределенными по боковой поверхности силами типа сухого трения и силой лобового сопротивления;
– волновая модель продольного удара по стержню с учетом сил трения;
– волновая модель продольного удара по стержню с учетом сил трения по боковой поверхности;
– волновая модель продольного удара с учетом инерции движения частиц в радиальном направлении;
– волновая модель продольного удара по стержню с учетом дисперсии.

Естественно, что данное обобщение моделей продольного удара может быть дополнено. Но уже это обобщение познакомит читателя с основными направлениями исследований в этой области и будет полезно специалистам.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абрамов Б. М. Применение метода рядов для исследования продольного удара стержней / Б. М. Абрамов, А. Б. Абрамов // Теория механизмов и машин. – Харьков: Вища шк., 1972. – С. 47 – 58.

2. Абрамов А. Б. Определение усилий при продольно-поперечном ударе /А. Б. Абрамов, Б. М. Абрамов // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1975. – № 9. – С. 58 – 64.

3. Авдеева А. И. Волновые процессы при распространении силовых импульсов по ставу штанг: автореф. дисс. канд. техн. наук / А. И. Авдеева. – Томск, 1999. – 27 с.

4. Адищев В. В. Точное решение задачи об ударе по стержню с учетом дисперсии / В. В. Адищев, В. Б. Кардаков // Изв. вузов. Строительство. – 1992. – № 4. – С. 46 – 48.

5. Адищев В. В. Формирование волн напряжений при ударе по стержню с учетом дисперсии / В. В. Адищев, В. Е. Вдовин, В. Б. Кардаков // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1990. – № 6. – С. 35 – 40.

6. Адищев В. В. Постановка и решение задачи об ударе груза по стержню с учетом дисперсии и геометрической нелинейности / В. В. Адищев, В. Е. Вдовин // Изв. вузов. Строительство. – 1996. – № 5. – С. 15 – 19.

7. Алабужев П. М. Введение в теорию удара / П. М. Алабужев, Б. Н. Стихановский, И. Я. Шпигелъбурд. – Новосибирск: НЭТИ, 1970. – 158 с.

8. Александров Е. В. Исследование процесса ударного взаимодействия горной породы и инструмента / Е. В. Александров, В. Б. Соколинский. – М.: ИГД им. А. А. Скочинского, 1965. – 46 с.

9. Александров Е. В. Прикладная теория и расчет ударных систем / Е. В. Александров, В. Б. Соколинский. – М.: Наука, 1969. – 199 с.

10. Александров Е. В. Исследование взаимодействия инструмента и горной породы при ударном разрушении / Е. В. Александров, В. Б. Соколинский, Г. М. Захариков, Ким Дин Хи. – М.: ИГД им. А. А. Скочинского, 1967. – 61 с.

11. Александров Е. В. Определение импульсов напряжения при продольном соударении упругих стержней произвольной геометрической формы / Е. В. Александров, Ю. Ф. Флавицкий, К. С. Хомяков. – М.: ИГД им. А. А. Скочинского, 1965. – 40 с.

12. Алимов О. Д. Бурильные машины / О. Д. Алимов, Л. Т. Дворников. – М.: Машиностроение, 1976. – 295 с.

13. Алимов О. Д. Исследование прохождения ударных импульсов по стержневой системе с участками разного волнового сопротивления / О. Д. Алимов, Л. Т. Дворников, В. Э. Еремьянц, А. Ф. Лисовский, В. К. Манжосов // Физико-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. – 1973. – № 6. – С. 66 – 68.

14. Алимов О. Д. Амортизация волнового импульса с помощью упругого элемента малой длины / О. Д. Алимов, Л. Т. Дворников, И. Д. Шапошников //

Труды Фрунзенского политехн. ин-та. Вып. 38 (математика). – Фрунзе, 1969. – С. 82 – 91.
15. Алимов О. Д. Исследование процессов разрушения горных пород при бурении шпуров / О. Д. Алимов. – Томск: Томский государственный университет, 1960.
16. Алимов О. Д. Влияние параметров ударного импульса на эффективность разрушения горной породы / О. Д. Алимов, А. Ф. Лисовский // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых, 1973. – № 5. – С. 62 – 64.
17. Алимов О. Д. Распространение волн деформаций в ударных системах / О. Д. Алимов, В. К. Манжосов, В. Э. Еремьянц. – Фрунзе: Илим, 1978.– 196 с.
18. Алимов О. Д. Расчет ударных систем с неторцевым соударением элементов / О. Д. Алимов, В. К. Манжосов, В. Э. Еремьянц, Л. М. Мартыненко. – Фрунзе: Илим, 1979. – 102 с.
19. Алимов О. Д. Расчет динамического внедрения инструмента в обрабатываемую среду / О. Д. Алимов, В. К. Манжосов, В. Э. Еремъянц, Ю. В. Невенчанный. – Фрунзе: Илим, 1980. – 43 с.
20. Алимов О. Д. Теория ударных систем с неторцевым соударением элементов / О. Д. Алимов, В. К. Манжосов, В. Э. Еремъянц. – Фрунзе: Илим, 1981. – 69 с.
21. Алимов О. Д. Метод расчета ударных систем с элементами различной конфигурации / О. Д. Алимов, В. К. Манжосов, В. Э. Еремьянц. – Фрунзе: Илим, 1981. – 72 с.
22. Алимов О. Д. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах / О. Д. Алимов, В. К. Манжосов, В. Э. Еремьянц. – М.: Наука, 1985. – 386 с.
23. Алпеева В. А. Возбуждение и преобразование волн деформаций в ударных системах машин для испытаний изделий: дисс. канд. техн. наук. / В. А. Алпеева. – Фрунзе: ФПИ, 1990. – 281 с.
24. Алпеева В. А. Исследование процесса взаимодействия волны деформации, распространяющейся по стержню с изделием на торце стержня при неудерживающих связях / В. А. Алпеева // Динамика механизмов для возбуждения виброударных нагрузок. – Фрунзе: ФПИ, 1988. – С. 17 – 27.
25. Алпеева В. А. Взаимодействие волн деформаций с массой на торце стержня при неудерживающих связях между массой и стержнем / В. А. Алпеева, В. К. Манжосов // Ударные процессы в технике. – Фрунзе: Киргизский гос. университет, 1988.
26. Алпеева В. А. Взаимодействие продольной волны деформации с сосредоточенной массой на торце стержня / В. А. Алпеева, В. К. Манжосов // Вестник УлГТУ. – 2002. – №4. – С. 24 – 28.
27. Андреев В. Д. Графический метод расчета напряжений в бойках ударных механизмов / В. Д. Андреев // Взрывное дело, 56/13. – М.: Недра, 1964. – С. 51 – 66.
28. Андреев В. Д. Формирование импульсов напряжений в ударных узлах буровых машин / В. Д. Андреев // Взрывное дело, 58/15. – М.: Недра, 1966. – С. 147 – 156.

29. Андреев В. Д. Расчет передачи энергии ударного импульса через инструмент в породу / В. Д. Андреев // Горный породоразрушающий инструмент. – Киев: Техника, 1969. – С. 71 – 79.
30. Андреев В. Д. Исследование влияния угла заострения инструмента на процесс взаимодействия с породой / В. Д. Андреев, А. М. Банковский, С. И. Скляр // Горный породоразрушающий инструмент. – Киев: Техника, 1970. – С. 169 – 178.
31. Андреев В. Д. Исследование эффективности разрушения горных пород в зависимости от продолжительности и амплитуды прямоугольного импульса / В. Д. Андреев, К. И. Иванов // Взрывное дело 66/23. – М.: Недра, 1969.
32. Андреев В. Д. Исследование сопротивления породы внедрению инструмента / В. Д. Андреев, К. И. Иванов // Горный породоразрушающий инструмент. – Киев: Техника, 1969. – С. 67 – 71.
33. Ахенбах Дж. Д. Колебания и волны в направленно армированных композитах / Дж. Д. Ахенбах // Композиционные материалы. – М.: Мир, 1978. – Т. 2. – С. 354 – 400.
34. Батуев Г. С. Инженерные методы исследования ударных процессов / Г. С. Батуев, Ю. В. Голубков, А. К. Ефремов, А. А. Федосов. – М.: Машиностроение, 1977. – 240 с.
35. Баранов В. Л. Ударное нагружение стержня конечной длины из упруговязкопластического материала / В. Л. Баранов, Б. В. Могильников // Изв. вузов. Машиностроение. – 1986. – № 3. – С. 29 – 31.
36. Барон Л. И. Экспериментальные исследования процессов разрушения горных пород ударом / Л. И. Барон, Г. М. Веселов, Ю. Г. Коняшин. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 219 с.
37. Барон Л. И. Влияние формы ударника на импульсы напряжений и эффективность разрушения горной породы / Л. И. Барон, Ю. Г. Коняшин, А. В. Кузнецов, В. М. Курбатов // Шахт. стр-во. – 1969. – № 8. – С. 8 – 10.
38. Бахолдин Б. В. О величине напряжений в сваях при забивке / Б. В. Бахолдин // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1967. – № 2.
39. Беляев Ю. В. О степени использования энергии удара в ударных машинах / Ю. В. Беляев // Сб. тр. Всесоюз. НИИ строит.-дорожн. машиностр. – М.: Машгиа, 1955. – № 10. – С. 35 – 49.
40. Беляев Ю. В. Приложение теории упруго-пластических волн к определению потерь энергии при погружении свай / Ю. В. Беляев, Л. А. Бойко // Изв. вузов. Машиностроение. – 1973. – № 4. – С. 21 – 26.
41. Беляев Ю. В. Возможности упрощенной постановки задач о соударении упругих тел / Ю. В. Беляев // Сб. трудов Московского инженерно-строительного института. – М., 1978. – № 156.
42. Беляев Ю. В. Продольный удар по упругому стержню с амортизатором при действии сухого трения / Ю. В. Беляев // Изв. вузов. Машиностроение. – 1982. – № 7. – С. 33 – 38.
43. Бержерон Л. От гидравлического удара в трубах до разряда в электрической сети / Л. Бержерон. – М.: Машгиз, 1961. – 347 с.

44. Бессонов Ю. Д. К расчету напряжений в колонковой трубе и ударнике / Ю. Д. Бессонов // Тр. межвуз. науч. конф. по электр. машинам ударного действия: сб. докл. – Новосибирск, 1967. – С. 116 – 119.
45. Бидерман В. Л. Расчеты на ударную нагрузку / В. Л. Бидерман // Расчеты на прочность в машиностроении. – М.: Машгиз, 1959. – Т. 3. – С. 479 – 580.
46. Бидерман В. Л. Прикладная теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. – М.: Высш. шк., 1972. – 416 с.
47. Битюрин А. А. Моделирование продольного удара однородных стержней при неудерживающих связях / А. А. Битюрин, В. К. Манжосов // Труды 6-й Международной конференции «Математическое моделирование физических, технических, экономических, социальных систем и процессов», 19 – 21 октября 2005. – Ульяновск, 2005. – С. 25 – 27.
48. Васильевский Ю. И. Продольный удар по полубесконечному стержню через упругую прокладку / Ю. И. Васильевский // Прикладная механика. – Киев, 1967. – Т. III, вып. 4.
49. Васильевский Ю. И. Модельные исследования напряженного состояния сваи при забивке / Ю. И. Васильевский // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1970. – № 7. – С. 34 – 40.
50. Веклич Н. А. Распространение волн в упругих стержнях, находящихся в среде с сухим трением / Н. А. Веклич, Б. М. Малышев // Задачи механики твердого деформируемого тела. – М., 1985. – С. 64 – 99.
51. Герсеванов Н. М. Теория продольного удара с применением к определению сопротивления свай. Собр. соч. / Н. М. Герсеванов. – М.: Стройвоенмориздат, 1948. – Т. 1. – С. 70 – 94.
52. Гольдсмит В. Удар. / В. Гольдсмит. – М.: Стройиздат, 1965. – 448 с.
53. Гольдсмит В. Удар и контактные явления при средних скоростях. Физика быстропротекающих процессов / В. Гольдсмит. – М.: Мир, 1971. – С. 153 – 203.
54. Горбунов В. Ф. Определение напряжений в буровых штангах при продольном ударе в зависимости от параметров пневматического ударного узла / В. Ф. Горбунов, Л. А. Саруев, А. С. Сердечный // Изв. Вузов. Горн. ж. – 1972. – № 3. – С. 83 – 84.
55. Горбунов В. Ф. Результаты лабораторных испытаний передачи энергии удара по ставу штанг малого диаметра / В. Ф. Горбунов, А. Г. Цуканов, Л. А. Саруев, Г. М. Кашкаров // Изв. Вузов. Горн. ж. – 1969. – № 10. – С. 63 – 65.
56. Грицюк В. Е. Расчет стержня с сосредоточенными массами на действие продольного удара / В. Е. Грицюк // Изв. Вузов. Машиностроение. – 1979. – № 3. – С. 11 – 14.
57. Григорьев Е. Т. Продольные совместные колебания стержня и систем масс / Е. Т. Григорьев, Н. Б. Тульчинская. – Киев: Наукова думка, 1991. – 155 с.
58. Дворников Л. Т. Формирование ударного импульса в полубесконечном стержне бойком, имеющим форму гиперболоида вращения / Л. Т. Дворников, А. А. Мясников // Труды Фрунзенского политехн. ин-та. – Фрунзе, 1977. – Вып. 104. – С. 70 – 82.

59. Дворников Л. Т. Исследование влияния длительности и амплитуды ударного импульса на эффективность процесса бурения / Л. Т. Дворников, Б. Т. Тагаев // Тр. ФПИ. – Фрунзе, 1977. – Вып. 104. – С. 62 – 69.
60. Дворников Л. Т. К вопросу о влиянии формы бойков ударных механизмов на эффективность разрушения горных пород / Л. Т. Дворников, Б. Т. Тагаев. – Фрунзе: Илим, 1981. – № 6. – С. 16 – 21.
61. Дворников Л. Т. Исследование импульсов, генерируемых бойками различной формы / Л. Т. Дворников, И. Д. Шапошников // Исследование узлов буровых установок. – Фрунзе: Илим, 1972. – С. 64 – 70.
62. Дидух Б. И. О напряжениях в теле сваи при ударе через упругую прокладку / Б. И. Дидух, Д. А. Трифонов-Яковлев // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1970. – № 3.
63. Динник А. Н. Удар и сжатие упругих тел: Ивбр. тр. / А. Н. Динник. – Киев: АН УССР, 1952. – Т. 1. – 152 с.
64. Доброгурский С. О. К вопросу о напряжениях и усилиях при ударе / С. О. Доброгурский // Вопросы расчета и конструирования деталей машин. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1942. – С. 3 – 106.
65. Еремьянц В. Э. К теории передачи удара в системах с элементами из различных материалов / В. Э. Еремьянц // Тр. НКИ. – Николаев, 1981. – Вып. 182. – С. 67 – 73.
66. Еремьянц В. Э. Влияние формы ударного импульса на процесс взаимодействия инструмента с обрабатываемой средой / В. Э. Еремьянц. – Фрунзе: Илим, 1981. – 60 с.
67. Еремьянц В. Э. Экспериментальные исследования ударных систем с неторцевым соударением элементов / В. Э. Еремьянц, А. Н. Демидов. – Фрунзе: Илим, 1981. – 70 с.
68. Еремьянц В. Э. Ударное нагружение оснащенных стержней / В. Э. Еремьянц, Ю. В. Невенчанный, Н. Г. Писаренко. – Фрунзе: Илим, 1987. – 165 с.
69. Есипенко В. Г. Погрешности в определении усилия и скорости смещения при неучете волновых процессов в бойках ударных механизмов / В. Г. Есипенко // Изв. вузов. Машиностроение. – 1986. – № 3. – С. 32 – 33.
70. Жуков И. А. Формирование упругих волн в волноводах при ударе по ним полукатеноидальными бойками: автореф. дисс. канд. техн. наук / И. А. Жуков. – Томск, 2005. – 21 с.
71. Забылин М. И. К расчету напряжений в фундаментах от импульсных нагрузок / М. И. Забылин, А. П. Раинчик, Е. В. Тетенов, А. В. Федоров // Изв. Вузов. Строительство и архитектура. – 1978. – № 3.
72. Забылин М. И. Вопросы динамического расчета оснований и фундаментов под машины / М. И. Забылин // Изв. Вузов. Строительство и архитектура. – 1980. – № 7.
73. Закаблуковский Н. Г. Стенд для исследования передачи единичного продольного удара в системе боек – инструмент – среда / Н. Г. Закаблуковский, Г. Н. Покровский, Б. Н. Серпенинов // Передача удара и машины ударного действия. – Новосибирск: ИГД СО АН СССР, 1976.

74. Зегжда С. А. К теории Сирса продольного соударения стержней / С. А. Зегжда // Вестн. ЛГУ. – 1964. – № 7. – С. 81 – 90.
75. Зегжда С. А. Продольное соударение двух систем стержней / С. А. Зегжда // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1969. – № 4. – С. 132 – 143.
76. Иванов К. И. Влияние формы ударника на коэффициент передачи энергии удара в породу / К. И. Иванов // Горный породоразрушающий инструмент. – Киев: Техника, 1970. – С. 166 – 169.
77. Иванов К. И. К расчету напряжений при ударном бурений / К. И. Иванов, В. Д. Андреев // Взрывное дело, 56/13. – М.: Недра, 1964. – С. 18 – 33.
78. Иванов К. И. Исследование эффективности разрушения горных пород в зависимости от продолжительности и амплитуды прямоугольного импульса / К. И. Иванов, В. Д. Андреев // Взрывное дело, 66/23. – М.: Недра, 1969. – С. 87 – 100.
79. Иванов К. И. Распространение энергии ударного импульса по инструменту применительно к бурению глубоких взрывных скважин перфораторами с независимым вращением бура / К. И. Иванов, В. Д. Андреев // Взрывное дело, 58/15. – М.: Недра, 1966. – С. 219 – 226.
80. Иванов К. И. Разрушение горных пород ударными импульсами, генерируемыми поршнями различной формы / К. И. Иванов, В. Д. Андреев // Взрывное дело, 58/15. – М.: Недра, 1966. – С. 244 – 253.
81. Иванов К. И. Влияние формы поршня на скорость бурения / К. И. Иванов, В. Д. Андреев, Е. И. Пригожий и др. // Взрывное дело, 66/23. – М.: Недра, 1969. – С. 81 – 87.
82. Иванов К. И. Исследование эффективности применения поршней различной конструкции для разрушения горных пород / К. И. Иванов, В. Д. Андреев, Г. Г. Манзиенко, Н. Н. Ушков // Горн. журн. – 1965. – № 12. – С. 45 – 47.
83. Иванов К. И. Техника бурения при разработке месторождений полезных ископаемых / К. И. Иванов, М. С. Варич, В. И. Дусев, В. Д.Андреев. – М.: Недра, 1974. – 408 с.
84. Иванов К. И. Анализ энергоемкости разрушения горных пород с помощью прямых и отраженных ударных импульсов / К. И. Иванов, Г. Г. Манзиенко, Н. Н. Ушков // Взрывное дело, 58/15. – М.: Недра, 1966. – С. 253 – 260.
85. Иванов К. И. Техника бурения при разработке месторождений полезных ископаемых / К. И. Иванов, В. А. Латышев, В. Д. Андреев. – М.: Недра, 1987. – 272 с.
86. Исаков А. Л. Анализ волновых процессов при забивании металлических труб в грунт с использованием генератора ударных импульсов / А. Л. Исаков, В. В. Шмелев // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 1998. – № 2. – С. 48 – 38.
87. Исаков А. Л. Об эффективности передачи ударного импульса при забивании металлических труб в грунт / А. Л. Исаков, В.В. Шмелев // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 1998. – № 1. – С. 89 – 97.

88. Каталымов Ю. В. Определение напряжений в сваях при ударном погружении в грунт / Ю. В. Каталымов, Ю. Н. Санкин // Механика и процессы управления. – Ульяновск, 1996. – С. 38 – 43.
89. Каталымов Ю. В. Математическое моделирование продольного удара в стержнях с учетом взаимодействия с внешней средой: автореф. … канд. техн. наук / Ю. В. Каталымов. – Ульяновск: УлГТУ, 1997. – 19 с.
90. Кильчевский Н. А. Теория соударения твердых тел / Н. А. Кильчевский. – Киев: Наукова думка, 1969. – 246 с.
91. Кильчевский Н. А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар / Н. А. Кильчевский. – Киев: Наук. думка, 1976. – 320 с.
92. Кириллов А. А. Алгоритм расчета параметров ударных импульсов при передаче ударной нагрузки через боковую поверхность погружаемых в грунт стержневых элементов / А. А. Кириллов // Виброударные процессы в строительном производстве. – Новосибирск: ИГД СО АН СССР, 1986. – С. 91 – 98.
93. Клей Р. В. Ударные волны в твердых телах и механика горных пород / Р. В. Клей, М. А. Кук, Р. Т. Кейс // Разрушение и механика горных пород. – М.: Госгортехиздат, 1962. – С. 410 – 440.
94. Козлова З. П. Замечания об ударном воздействии / З. П. Козлова // ПММ. – 1999. – Т. 63, вып. 4. – С. 696 – 697.
95. Колимбас Д. Определение отказа и несущей способности сваи / Д. Колимбас, Л. В. Никитин // ОФМГ. – 1999. – № 2. – С. 2 – 8.
96. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах / Г. Кольский. – М.: Изд-во иностр. лит, 1955. – 192 с.
97. Коняшин Ю. Г. Экспериментальное исследование влияния параметров удара на показатели разрушения горных пород / Ю. Г. Коняшин // Разрушение горных пород механическими способами. – М.: Наука, 1966. – С. 116 – 128.
98. Коняшин Ю. Г. Расчетные зависимости для определения эффективности разрушения горных пород ударом / Ю. Г. Коняшин // Взрывное дело, 66/23. – М.: Недра, 1969. – С. 44 – 67.
99. Крюков Г. М. Постановка и решение общей задачи по определению оптимальных импульсов напряжений, генерируемых в штангах при ударно-вращательном и вращательно-ударном способах бурения / Г. М. Крюков // Тр. МИРЭА. – 1970. – № 48. – С. 78 – 81.
100. Крюков Г. М. Закономерности силового взаимодействия внедряющихся инструментов с горной породой / Г. М. Крюков // Изв. вузов. Горн. журн. – 1978. – № 3. – С. 68 – 75.
101. Крюков Г. М. Сравнительный анализ глубины проникновения ударного инструмента в упругую среду при различной форме прямоугольного нагружающего импульса / Г. М. Крюков, В. Р. Федоров // Тр. МИРЭА. – 1970. – № 48. – С. 64 – 77.
102. Крюков Г. М. Форма и к. п. д. оптимальных и других импульсов для штангового бурения горных пород при линейной зависимости их сил сопро-

тивления от глубины внедрения инструмента / Г. М. Крюков, В. Р. Федоров, А. А. Матюшин, И. Н. Бондарь // Тр. МИРЭА. – 1970. – № 48. – С. 82 – 87.
103. Кунтуков Ю. Г. Потери энергии удара в зависимости от конструкции и числа соединений буровых штанг / Ю. Г. Кунтуков, С. С. Музгин // Добыча и обогащение руд цветных металлов. – 1963. – № 4. – С. 30 – 31.
104. Кутузов Б. П. Процесс динамического взаимодействия инструмента с породой / Б. П. Кутузов, Г. М. Крюков, В. П. Тарасенко. – М.: МГИ, 1969. – 280 с.
105. Лисовский А. Ф. К вопросу о сопротивлении горных пород динамическому внедрению инструмента / А. Ф. Лисовский, Л. Т. Дворников // Совершенствование буровых машин. – Фрунзе: Илим, 1970. – С. 75 – 84.
106. Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики / А. И. Лурье. – М.; Л.: Гостехиздат, 1951. – 431 с.
107. Маврин А. И. К теории ударного погружения свай / А. И. Маврин // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1967. – № 8. – С. 24 – 28.
108. Маланов С. Б. Ударное взаимодействие сосредоточенного объекта с одномерной упругой системой / С. Б. Маланов, Г. А. Уткин // ПММ. – 1988. – Т. 52, вып. 1. – С. 42 – 46.
109. Маланов С. Б. Косой удар материальной точкой по бесконечной струне на упругом основании / С. Б. Маланов, Г. А. Уткин // ПММ. – 1988. – Т. 52, вып. 5. – С. 861 – 863.
110. Малков О. Б. Динамика стержневых систем с внутренними граничными поверхностями: автореф. дисс. докт. техн. наук / О. Б. Малков. – Омск, 2000. – 38 с.
111. Малков О. Б. Расчет ударных импульсов в ступенчатых стержневых системах / О. Б. Малков. – Омск, 2000. – 112 с.
112. Малков О. Б. Общий способ расчета параметров плоского удара в ступенчатых ударных системах / О. Б. Малков // Физико-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. – 2000. – № 1. – С. 61 – 66.
113. Малков О. Б. Математическое моделирование продольного удара в ступенчатых системах / О. Б. Малков, Б. Н. Стихановский // Прикладные задачи механики. – Омск: ОмГТУ, 1999. – С. 118 – 121.
114. Малков О. Б. О расчете многостержневых ступенчатых ударных систем / О. Б. Малков, Б. Н. Стихановский // Физико-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. – 2000. – № 3. – С. 101 – 107.
115. Манжосов В. К. Удар стержня конечной длины о полубесконечный стержень при линейном упругом элементе между ними / В. К. Манжосов // Прикладные задачи механики. – Бишкек: Киргизский государственный университет, 1992. – С. 3 – 10.
116. Манжосов В. К. Прикладные методы расчета стержневых систем при ударном нагружении: концепция, гипотезы, реализация / В. К. Манжосов // Механизмы переменной структуры и вибрационные машины. Материалы 2-й

Межд. конф. – Бишкек, 1995. – С. 117 – 119.
117. Манжосов В. К. Преобразование продольной волны деформации постоянной интенсивности на границе стержневой системы / В. К. Манжосов // Механика и процессы управления. – Ульяновск: УлГТУ, 1996. – С. 13 – 29.
118. Манжосов В. К. Удар массы по полуограниченному стержню через сосредоточенный линейный упругий элемент / В. К. Манжосов // Прикладные задачи механики. – Ульяновск: УлГТУ, 1998. – С. 7 – 23.
119. Манжосов В. К. Отражение и прохождение продольной волны деформации на границе сопряженных стержней / В. К. Манжосов // Вестник УлГТУ. – 1999. – № 1. – С. 70 – 78.
120. Манжосов В. К. Моделирование продольного удара в стержневых системах неоднородной структуры. Труды международной НТК «Вопросы проектирования, эксплуатации технических систем в металлургии, машиностроении, строительстве». Часть 2 / В. К. Манжосов. – Старый Оскол, 1999. – С. 144 – 146.
121. Манжосов В. К. Ударное нагружение сваи. Труды международной НТК «Вопросы проектирования, эксплуатации технических систем в металлургии, машиностроении, строительстве». Часть 2 / В. К. Манжосов. – Старый Оскол, 1999. – С. 146 – 148.
122. Манжосов В. К. Удар упругого шара о жесткую преграду / В. К. Манжосов // Вестник УлГТУ. – 1999. – №1. – С. 96 – 98.
123. Манжосов В. К. Моделирование продольного удара сосредоточенной массы по стержню, взаимодействующемму с абсолютно жесткой преградой / В. К. Манжосов // Вестник УлГТУ. – 2000. – № 2. – С. 70 – 78.
124. Манжосов В. К. Удар конического стержня о жесткую преграду / В. К. Манжосов // Механика и процессы управления: сб. научн. трудов // Ульяновск: УлГТУ, 2000. – С. 51 – 60.
125. Манжосов В. К. Продольный удар сосредоточенной массы по полуограниченному стержню с упругой прокладкой в ударном сечении / В. К. Манжосов // Вестник УлГТУ. – 2001. – № 3. – С. 77 – 87.
126. Манжосов В. К. Моделирование продольного удара сосредоточенной массы по полуограниченному стержню с упругой прокладкой в ударном сечении / В. К. Манжосов // Механика и процессы управления. – Ульяновск: УлГТУ, 2002. – С. 36 – 48.
127. Манжосов В. К. Моделирование волновых процессов при продольном ударе сосредоточенной массы по стержню, взаимодействующему с преградой. Труды 5-й Международной конференции «Математическое моделирование». – Ульяновск: УлГУ, 2003. – С. 121 – 123.
128. Манжосов В. К. Моделирование удара конического стержня о жесткую преграду. Труды 5-й Международной конференции «Математическое моделирование». – Ульяновск: УлГУ, 2003. – С. 123 – 124.
129. Манжосов В. К. Модель процесса преобразования продольной волны

деформации на границе разнородных участков стержня с сосредоточенной массой / В. К. Манжосов // Вестник УлГТУ. – 2003. – №1 – 2. – С. 28 – 30.
130. Манжосов В. К. Моделирование процесса преобразования продольной волны деформации на границе разнородных участков стержня с сосредоточенной массой / В. К. Манжосов // Вестник УлГТУ. – 2002. – №4. – С. 71 – 85.
131. Манжосов В. К. Моделирование удара стержня сложной формы о жесткую преграду. Материалы II международного научного Симпозиума «Механизмы и машины ударного, периодического и вибрационного действия» / В. К. Манжосов. – Орел, 2003. – С. 284 – 288.
132. Манжосов В. К. Моделирование динамических процессов при продольном ударе сосредоточенной массы по стержню. Материалы II международного научного Симпозиума «Механизмы и машины ударного, периодического и вибрационного действия». – Орел, 2003. – С. 359 – 364.
133. Манжосов В. К. Восстановление скорости стержня при продольном ударе о жесткую преграду / В. К. Манжосов // Вестник УлГТУ. – 2003. – № 3 – 4. – С. 22 – 24.
134. Манжосов В. К. Моделирование удара конического стержня о полуограниченный стержень / В. К. Манжосов // Механика и процессы управления. Сб. научн. трудов. – Ульяновск: УлГТУ, 2004. – С. 66 – 78.
135. Манжосов В. К. Волновые процессы при продольном ударе по неоднородному стержню / В. К. Манжосов // III Всероссийское совещание-семинар заведующих кафедрами теоретической механики вузов Российской Федерации. Тез. докл. – Пермь, 2004. – С. 83 – 84.
136. Манжосов В. К. Континуальная модель продольного удара в стержневых системах / В. К. Манжосов // Математические методы и модели в прикладных задачах науки и техники. Труды Межд. конференции «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке и технике», т. 7, 16 – 20 мая 2004. – Ульяновск, 2004. – С. 144 – 146.
137. Манжосов В. К. Моделирование удара конического стержня о полуограниченный стержень / В. К. Манжосов // Прикладная математика и механика. – Ульяновск: УлГТУ, 2004. – С. 91 – 103.
138. Манжосов В. К. Удар стержня конечной длины о полуограниченный стержень с упругой прокладкой в ударном сечении / В. К. Манжосов // Вестник УлГТУ. – 2004. – № 3. – С. 24 – 27.
139. Манжосов В. К. Метод переноса состояния волн деформаций в задачах продольного динамического нагружения стержня / В. К. Манжосов // Вестник УлГТУ. – 2004. – № 4. – С. 22 – 25.
140. Манжосов В. К. Алгоритм расчета ударного взаимодействия инструмента с обрабатываемой средой / В. К. Манжосов, В. Э. Еремьянц, Ю. В. Невенчанный // Тр. НКИ. – Николаев, 1980. – Вып. 169. – С. 44 – 52.
141. Манжосов В. К. Модель продольного удара неоднородного стержня о жесткую преграду / В. К. Манжосов, А. А. Битюрин // Механика и процессы

управления. Сб. научн. трудов. – Ульяновск: УлГТУ, 2004. – С. 79 – 88.
142. Манжосов В. К. Модель продольного удара неоднородного стержня о жесткую преграду / В. К. Манжосов, А. А. Битюрин // Математические методы и модели в прикладных задачах науки и техники. Труды межд. конфернции «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке и технике», т. 7, 16 – 20 мая 2004. – Ульяновск, 2004. – С. 147 – 149.
143. Манжосов В. К. Модель продольного удара неоднородного стержня о жесткую преграду. Труды 2-й Международной научно-технической конференции «Современные проблемы машиностроения», 8 – 12 декабря 2004. – Томск, 2004. – С. 268 – 272.
144. Манжосов В. К. Продольный удар неоднородного стержня о жесткую преграду / В. К. Манжосов, А. А. Битюрин // Актуальные вопросы промышленности и прикладных наук. Сб. статей Международной заочной научно-технической конференции (1 октября – 20 декабря 2004 года). – Ульяновск, 2004. – С. 135 – 140.
145. Манжосов В. К. Динамика электромагнитных генераторов силовых импульсов / В. К. Манжосов, Н. О. Лукутина. – Фрунзе: Илим, 1979. – 67 с.
146. Манжосов В. К. Движение однородного стержня при действии постоянного давления на торце / В. К. Манжосов, Н. Б. Мартынова // Вестник УлГТУ. – 2001. – № 3. – С. 86 – 91.
147. Манжосов В. К. Моделирование процесса преобразования продольной волны деформации на границе разнородных участков стержней с линейным упругим элементом / В. К. Манжосов, С. В. Масюков // Вестник УлГТУ. – 2000. – № 2. – С. 79 – 86.
148. Манжосов В. К. Удар стрежня конечной длины о полуограниченный стержень через упругую прокладку в ударном сечении / В. К. Манжосов, С. В. Масюков // Механика и процессы управления: сб. научн. трудов. – Ульяновск: УлГТУ, 2000. – С. 61 – 64.
149. Манжосов В. К. Расчет стержней при динамическом нагружении / В. К. Манжосов. – Ульяновск: УлГТУ, 2004. – 92 с.
150. Масюков С. В. Удар сосредоточенной массы по стержню конечной длины через упругую прокладку в ударном сечении / С. В. Масюков // Механика и процессы управления. – Ульяновск: УлГТУ, 2002. – С. 49 – 54.
151. Ударные стенды для испытания малогабаритных изделий. / Г. С. Мигиренко, В. Н. Евграфов, А. А. Рыков, В. Ф. Хон. – Иркутск, 1987. – 216 с.
152. Миттра Р. Аналитические методы теории волноводов / Р. Миттра, С. Ли. – М.: Мир, 1974. – 328 с.
153. Мостков В. М. Основы теории пневматического бурения / В. М. Мостков. – М.: Углетехиздат, 1952. – 140 с.
154. Муморцев А. Н. Удар по стержню с упруго поворачивающейся опорой / А. Н. Муморцев, С. Ф. Сафонов // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1969. – № 10. – С. 50 – 57.

155. Мун Ф. Удар и распространение волн в композиционных материалах / Ф. Мун // Композиционные материалы. – М.: Машиностроение, 1978. – Т. 7. – Ч. 1 – С. 264 – 334.
156. Мясников А. А. О гипотезе плоских сечений для уравнений продольных колебаний стержней / А. А. Мясников // Механизмы переменной структуры и вибрационные машины. Материалы 2-й межд. конф. – Бишкек, 1995. – С. 124 – 127.
157. Мясников А. А. Обоснование рациональной конструкции механического генератора волн продольных колебаний машин ударного действия для разрушения горных пород: автореф. дисс. … канд. техн. наук / А. А. Мясников // Алма-Ата, 1983. – 19 с.
158. Мясников А. А. Импульс продольных колебаний, генерируемый бойком, имеющим форму гиперболоида вращения, в стержне постоянного поперечного сечения / А. А. Мясников // Материалы 6-й научн. -практ. конф. по проблемам машиностроения, металлургических и горных машин. – Новокузнецк: Сиб. гос. горно-металлургическая академия, 1997. – С. 55 – 67.
159. Мясников А. А. Модифицированное уравнение продольных колебаний стержней переменного поперечного сечения в цилиндрической системе координат / А. А. Мясников // Материалы 7-й научн.-практ. конф. по проблемам машиностроения, металлургических и горных машин. – Новокузнецк: Сиб. гос. горно-металлургическая академия, 1998. – С. 70 – 79.
160. Никитин Л. В. Распространение волн в упругом стержне при наличии сухого трения / Л. В. Никитин // Инженерный журнал. – 1963. – Т. III, вып. 1. – С. 154 – 157.
161. Никитин Л. В. Удар жестким телом по упругому стержню с внешним сухим трением / Л. В. Никитин // МТТ. – 1967. – № 2. – С. 166 – 170.
162. Никитин Л. В. Динамика упругих стержней с внешним сухим трением / Л. В. Никитин // Успехи механики. – М., 1988. – Т. 11, вып. 4. – С. 53 – 106.
163. Никитин Л. В. Поведение под нагрузкой упругого стержня, заглубленного в грунт / Л. В. Никитин, А. Н. Тюреходжаев // Проблемы механики горных пород. – Алма-Ата, 1966. – С. 314 – 321.
164. Никишин Н. И. Отскок бойка и влияние его на работу отбойных молотков и бетоноломов / Н. И. Никишин // Сб. тр. ВНИИСстройдормаш: Исследование и расчет ударных механизмов. – М.: Машгиз, 1961. – Т. 30. – С. 30 – 39.
165. Никонова И. П. Влияние формы импульса на передачу удара в системе боек – штанга – среда / И. П. Никонова, Г. Н. Покровский, Б. Н. Серпенинов // Передача удара и машины ударного действия. – Новосибирск: ИГД СО АН СССР, 1976. – С. 20 – 30.
166. Никонова И. П. Влияние формы бойка на акустический эффект при продольном ударе / И. П. Никонова, Б. Н. Серпенинов // Виброударные процессы в строительном производстве. – Новосибирск: ИГД СО АН СССР, 1986. – С. 85 – 90.

167. Павлова Н. И. Разрушение горных пород при динамическом нагружении / Н. И. Павлова, Л. А. Шрейнер. – М.: Недра, 1964. – 160 с.
168. Пановко Я. Г. Введение в теорию механического удара / Я. Г. Пановко. – М.: Наука, 1977. – 220 с.
169. Пирс Дж. Почти все о волнах / Дж. Пирс. – М.: Мир, 1976. – 176 с.
170. Писаренко Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. Я. Яковлев, В. В. Матвеев. – Киев: Наук. думка, 1975. – 704 с.
171. Рабинович М. И. Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
172. Рейхмус Д. Р. Корреляция экспериментальных зависимостей сила - перемещение с физическими свойствами горных пород при ударном бурении / Д. Р. Рейхмус // Механика горных пород. – М.: Недра, 1966. – С. 32 – 51.
173. Робертс А. Передача энергии при ударном бурении: Экспресс - информ. «Горнорудная промышленность» / А. Робертс, И. Хоукс, Д. Фарби. – М.: ВИНИТИ, 1963. – № 2. – С. 1 – 18.
174. Родионов А. И. Исследование соударений деформируемых тел при малых и средних скоростях: дисс…канд. физ.-мат.. наук / А. И. Родионов // Новосибирск, 1986. – 363 с.
175. Родионов А. И. О системе уравнений, описывающих удар твердого тела по упругому полупространству / А. И. Родионов // Вопросы динамики механических систем виброударного действия. – Новосибирск: НЭТИ, 1981. – С. 159 – 175.
176. Родионов А. И. Об ударе твердого тела по упругому полупространству / А. И. Родионов // Колебания. Удар. Защита. – Новосибирск: НЭТИ, 1982. – С. 153 – 157.
177. Родионов А. И. К теории удара деформируемых тел как элементов силовых импульсных систем / А. И. Родионов // Вопросы автоматизации производственных процессов с использованием силовых импульсных систем. – Новосибирск: НЭТИ, 1984. – С. 75 – 79.
178. Родионов А. И. К динамической теории удара деформируемых твердых тел / А. И. Родионов // Проблемы динамики механических систем. – Новосибирск: НЭТИ, 1985. – С. 86 – 93.
179. Родионов А. И. Об алгоритме расчета параметров ударных импульсов в стержневых системах с закругленными концами / А. И. Родионов, Т. А. Родионова, А. А. Рыков // Вопросы динамики механических систем виброударного действия. – Новосибирск: НЭТИ, 1977. – С. 161 – 168.
180. Родионов А. И. К расчету экспоненциального концентратора напряжений для ударного стенда // Гироскопические устройства. Динамические моделирующие стенды. – Томск: ТПИ, 1977. – С. 131 – 133.
181. Рудаков Ю. Ф. Исследование напряжений в ударной системе буровых машин методами дискретного математического моделирования с применением малогабаритных ЭВМ / Ю. Ф. Рудаков, Н. А. Кудря // Твердые сплавы и тугоплавкие металлы. – М.: Металлургия, 1974. – № 15. – С. 97 – 111.

182. Сагомонян А. Я. Волны напряжения в сплошных средах / А. Я. Сагомонян. – М.: Изд-во МГУ, 1985. – 416 с.
183. Саймон Р. Передача энергии волны напряжений в буровой штанге при ударном бурении породы, пер. ВНИИПТуглемаш, № 144/66 / Р. Саймон. – М.: ОНТИ, 1966. – 41 с.
184. Саймон Р. Расчет на вычислительных машинах волн напряжений от удара бойка в бурильных машинах / Р. Саймон // Механика горных пород. – М.: Недра, 1966. – С. 76 – 94.
185. Саруев Л. А. Передача энергии по ставу штанг при продольном импульсном воздействии / Л. А. Саруев, А. П. Слистнн, А. И. Авдеева. – Томск, 1995. – 6 с. – Деп. в ВИНИТИ 29.11.95, № 3164-В95.
186. Слистин А. П. Расчет параметров процесса передачи продольного ударного воздействия по стержням: автореф. дисс. канд. техн. наук / А. П. Слистин. – Томск, 1990. – 18 с.
187. Слистин А. П. Моделирование процесса соударения бойка с хвостовиком ударного инструмента / А. П. Слистнн, Л. А. Саруев // Известия Томского политехнического университета. – 2005. – Т. 308, № 2. – С. 116 – 119.
188. Смирнов О. В. Выбор параметров бойка гидроударных забойных машин / О. В. Смирнов // Бюл. НТИ: Новая буровая техника и технология ее применения. – М.: ОНТИ ВИЭМС, 1968. – Вып. 2. – С. 14 – 18.
189. Снитко Н. К. Горизонтальные колебания свай при эксцентричном ударе в процессе забивки / Н. К. Снитко, Е. Ф. Ежов // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1980. – № 11. – С. 54 – 57.
190. Соколинский В. Б. Расчет динамики ударного инструмента волновым методом: науч. сообщ. ИГД им. А. А. Скочинского. – 1963. – Т. 18. – С. 121 – 131.
191. Соколинский В. Б. О точности методов исследования ударных буровых машин // Взрывное дело, 79/36. – М.: Недра, 1978. – С. 13 – 17.
192. Соколинский В. Б. Расчет величины импульсного внедрения инструмента в разрушаемую среду / В. Б. Соколинский // Физические и комбинированные способы разрушения горных пород: науч. сообщ. ИГД им. А. А. Скочинского. – 1975. – Вып. 132. – С. 30 – 38.
193. Соколинский В. Б. Машины ударного разрушения / В. Б. Соколинский. – М.: Машиностроение, 1982. – 184 с.
194. Соколинский В. Б. Методы аналитического расчета параметров неупругого удара в волновых системах / В. Б. Соколинский. – М.: ИГД им. А. А. Скочинского, 1970. – 60 с.
195. Солодовников Р. В. Поперечный удар по балке, нагруженной продольными силами / Р. В. Солодовников, Л. Н. Смелянская // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1962. – № 2. – С. 3 – 12.
196. Спивак А. И. Механика горных пород / А. И. Спивак. – М.: Недра, 1967. – 192 с.

197. Стихановский Б. Н. КПД передачи энергии при упругом соударении стержней / Б. Н. Стихановский // Тр. межвуз. науч. конф. по электр. машинам ударного действия: сб. докл. – Новосибирск: НЭТИ, 1967. – С. 119 – 121.
198. Стихановский Б. Н. Приближенный метод определения времени, коэффициента восстановления, силы и передачи энергии при свободном прямом ударе тел / Б. Н. Стихановский // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. – 1971. – № 1. – С. 70 – 83.
199. Стихановский Б. Н. Исследование процессов соударения и создание машин, стендов и устройств ударного действия: дисс. … докт. техн. наук / Б. Н. Стихановский. – Л., 1981. – 455 с.
200. Стихановский Б. Н. Передача энергии ударом / Б. Н. Стихановский. – Омск, 1986. – Ч. 1. – 180 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 8115. – В 86.
201. Стихановский Б. Н. Передача энергии ударом / Б. Н. Стихановский. – Омск, 1995. – Ч. 2/3. – 146 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 1729. – В 95.
202. Стихановский Б. Н. Расчет параметров удара в системах со ступенчатыми ударниками / Б. Н. Стихановский, О. Б. Малков // Анализ и синтез механических систем. – Омск: ОмГТУ, 1998. – С. 40 – 43.
203. Стойчев В. Б. Прогнозирование параметров процесса погружения свай - труб пневматическими ударными машинами / В. Б. Стойчев, И. В. Можаев // Изв. вузов. Строительство. – 2004. – № 3. – С. 81 – 85.
204. Тарасенко В. П. Анализ импульсных характеристик разрушения горных пород при различных соотношениях длин ударника и долота / В. П. Тарасенко, В. Р. Федоров, Г. М. Крюков // Тр. МИРЭА, 1970. – № 48. – С. 56 – 63.
205. Тимошенко С. Д. Колебания в инженерном деле / С. Д. Тимошенко. – М.: Физматгиз, 1959. – 440 с.
206. Третьяков П. В. Интегральные решения волнового уравнения. Задача дифракции произвольной акустической волны на клине / П. В. Третьяков // ПММ. – 1991. – Т. 55., вып. 2. – С. 250 – 255.
207. Фабишевский К. В. Трансформация продольной упругой волны в составном стержне с упруго подвешенными сосредоточенными массами / К. В. Фабишевский // Прикл. механика. – 1977. – Т. 13, № 6. – С. 97 – 110.
208. Филиппов А. П. Колебания механических систем / А. П. Филиппов. – Киев.: «Наукова думка», 1965. – 457 с.
209. Фишер Г. Определение импульсов напряжений при ударном бурении / Г. Фишер // Разрушение и механика горных пород. – М.: Госгортехиздат, 1962. – С. 278 – 300.
210. Флавицкий Ю. В. Определение импульсов напряжения при продольном соударении упругих тел / Ю. В. Флавицкий, К. С. Хомяков. – М.: ИГД им. А. А. Скочинского, 1964. – 31 с.
211. Фолленсби (Follansbu P. S.). Распространение волн в составном стержне Гопкинса / Фолленсби (P. S. Follansbu), Франц (C. Franz) // Труды Американского общества инженеров-механиков. Теоретические основы инженерных

расчетов. – 1983. – № 1. – С. 73 – 80.
212. Харкевич А. А. Теория электроакустических преобразований. Волновые процессы. / А. А. Харкевич // Избранные труды. Т.1. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
213. Холмогоров Н. Н. Об ударном взаимодействии двух несвободных тел / Н. Н. Холмогоров // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1961. – № 4. – С. 50 – 61.
214. Хоукс И. Поведение волны деформации в штангах станков ударного бурения / И. Хоукс, П. Чакраварти // Разрушение и механика горных пород. – М.: Госгортехиздат, 1962. – С. 311 – 337.
215. Хаямидзу Х. Исследование твердости и вязкости пород при ударном бурении / пер. с яп. Всесоюз.-центр. пер., Ц-40629 / Х. Хаямидзу, С. Мисава, С. Такаока. – М., 1973. – 24 с.
216. Чернышев Ю. Г. О коэффициенте восстановления при забивке свай / Ю. Г. Чернышев // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1972. – № 7. – С. 148 – 151.
217. Цуканов А. Г. О передаче энергии при ударе в бурильных и отбойных молотках / А. Г. Цуканов // Изв. вузов. Горн. журн., 1962. – № 6. – С. 109 – 114.
218. Шапошников И. Д. К исследованию волн деформаций в элементах вращательно-ударного механизма бурильной машины / И. Д. Шапошников, Л. Т. Дворников, Г. С. Леонтьев // Тр. ФПИ. – Фрунзе, 1969. – Вып. 38. – С. 71 – 81.
219. Шелковников И. Г. Использование энергии удара в процессах бурения / И. Г. Шелковников. – М.: Недра, 1977. – 160 с.
220. Шрейнер Л. А. Механические и абразивные свойства горных пород / Л. А. Шрейнер, О. П. Петрова, В. П. Якушев и др. – М.: Гостоптехиздат, 1958.
221. Шубин А. А. Методика расчета и выбора параметров импульсных систем. М.: ИГД им. А. А. Скочинского, 1973. – Ч. II. – 44 с.
222. Hustrulid W. A. Theoretical and Experimental Study of the Percussive Drilling of Rock / W. A. Hustrulid , C. Fairhurst // International Journ. of Rock Mechanics and Mining Science, № 8, 1971; № 9, 1972.
223. Lundberg B. Some Basic Problems in Percussive Rock Destruction. - Goteborg: 1971.
224. Simon R. Transfer of the Stress Wave Energy in the Drill Steel of a Percussive Drill to the Rock / R. Simon // International Journ. of Rock Mechanics and Mining Science, № 1, 1964.

Научное издание

МАНЖОСОВ Владимир Кузьмич

МОДЕЛИ ПРОДОЛЬНОГО УДАРА

Редактор *О. А. Фирсова*

Подписано в печать 29.03.06. Формат 60 × 84/16.
Бумага офсетная. Печать трафаретная.
Усл. п. л. 9,30. Уч. - изд. л. 9,00.
Тираж 100 экз. Заказ

Ульяновский государственный технический университет
432027, Ульяновск, Сев. Венец, 32.
Типография УлГТУ, 432027, Ульяновск, Сев. Венец, 32.